ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2010 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Une méthode de Fredholm pour l'étude de certaines équations intégrales

Si f est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, on note, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, son n-ième coefficient de Fourier par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} \, dt \, .$$

On note $\bar{D}(0, R)$ le disque fermé du plan complexe de centre 0 et de rayon R.

On pourra se servir du résultat suivant, admis sans démonstration. Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ est une matrice carrée de taille n à coefficients complexes, alors

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\sup_{i,j} |a_{ij}| \right)^n$$

(inégalité de Hadamard).

Première partie : étude de quelques équations intégrales

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$, et de fonction inconnue $\phi_z : [0, 1] \to \mathbf{C}$ continue :

$$(E_z) \qquad \phi_z(x) - z \int_0^1 e^{x-y} \phi_z(y) \, dy = f(x) \, .$$

1a. Posons $\xi_z = \displaystyle\int_0^1 e^{-y} \phi_z(y) \, dy$. Écrire une relation simple exprimant ξ_z en fonction de z et f.

1b. En déduire que si $z \neq 1$, (E_z) possède une et une seule solution que l'on explicitera.

2. Soient f et K deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodiques, f étant de classe $\mathcal{C}^2$ et K de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbf{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue et 2π-périodique :

$$(F_z) \qquad \phi_z(x) - \frac{z}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi_z(t)\, dt = f(x) \; .$$

2a. Soit g une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continue, 2π-périodique. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) g(t)\, dt$$

est continue, 2π-périodique et que ses coefficients de Fourier $\widehat{h}(n)$ vérifient

$$\widehat{h}(n) = \widehat{K}(n)\widehat{g}(n) \; .$$

2b. Montrer que si $z \in \mathbf{C}$ est tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $z\widehat{K}(n) \neq 1$, l'équation (F_z) possède une et une seule solution dont on donnera le développement en série de Fourier.

3. Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbf{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$(H_z) \qquad \phi_z(x) - z \int_0^x \phi_z(t)\, dt = e^x \; .$$

Montrer que si ϕ_z est solution de (H_z), ϕ_z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. En déduire les solutions de (H_z).

Deuxième partie : quelques considérations d'algèbre linéaire

4a. Soit A un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E vérifiant $A^2 = A$. On note Id_E l'identité de E. Montrer que lorsque $z \neq 1$, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - zA$ de E est inversible et donner son inverse.

4b. On note $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. Considérons l'opérateur :

$$A : \begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbf{C}) & \to \mathcal{C}([0,1],\mathbf{C}) \\ \phi \mapsto A\phi, & \quad A\phi(x) = \int_0^1 e^{x-y}\phi(y)\; dy \end{cases} .$$

Montrer que A est linéaire et vérifie $A^2 = A$. Montrer que si $z \neq 1$, $\mathrm{Id} - zA$ est inversible et retrouver le résultat de la question **1b**.

5. On note $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes et 2π-périodiques. Plaçons-nous sous les hypothèses de la question **2**, et considérons l'opérateur :

$$A : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \to \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \\ A \mapsto A\phi, \quad A\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t)\; dt \end{cases} .$$

5a. Montrer que A est linéaire et que ses valeurs propres sont les $\widehat{K}(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

5b. Supposons que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $z\widehat{K}(n) \neq 1$. Proposer une condition suffisante pour que $\mathrm{Id} - zA$ soit inversible.

Troisième partie : équations intégrales, le cas général

Dans la suite du problème, on considère un intervalle fermé borné $[a,b]$, une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbf{C}$, et une fonction continue $N : [a,b] \times [a,b] \to \mathbf{C}$. On note $M = \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |N(x,y)|$. On considère l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbf{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : [a,b] \to \mathbf{C}$:

$$(I_z) \qquad \phi_z(x) - z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)\,dy = f(x)$$

Posons, pour $(x,y) \in [a,b]^2$,

$$N_0(x,y) = 1, \quad N_1(x,y) = N(x,y)\ ,$$

et par récurrence, pour tout entier $k \geq 2$, $N_k(x,y) = \displaystyle\int_a^b N(x,s)N_{k-1}(s,y)\,ds$.

Posons pour $z \in \mathbf{C}$, $x, y \in [a,b]$, $A(x,y,z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} N_k(x,y)z^{k-1}$.

6a. Montrer que les fonctions N_k sont bien définies et continues.

6b. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que la série $A(x,y,z)$ converge normalement sur $[a,b]^2 \times \bar{D}(0,R)$. (On pourra majorer $|N_k(x,y)|$ indépendamment de x et y dans $[a,b]$ en fonction de la constante M introduite plus haut.)

6c. Pour tout $z \in \bar{D}(0,R)$ et $x \in [a,b]$, posons $\psi_z(x) = \int_a^b A(x,t,z)f(t)\,dt$. Montrer que ψ_z est bien définie, continue sur $[a,b]$ et que

$$z\int_a^b N(x,y)\psi_z(y)\,dy = \psi_z(x) - \int_a^b N(x,t)f(t)\,dt\ .$$

En déduire que pour tout z de module strictement plus petit que R, $\phi_z(x) = f(x) + z\psi_z(x)$ est solution de l'équation (I_z).

Le but de la fin du problème est de montrer l'existence (sous certaines conditions) d'une solution de (I_z) en dehors du disque $\{z \in \mathbf{C},\ |z| < R\}$.

Soit n un entier naturel non nul. Notons pour x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$ dans l'intervalle $[a,b]$,

$$N\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}$$

le déterminant de la matrice dont le coefficient de la k-ième ligne et l-ième colonne est $N(x_k, y_l)$.

7. Montrer que

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, \ldots, s_n \\ y, s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} = N(x,y) N\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k N(x, s_k) N\begin{pmatrix} s_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, s_n \\ y, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_n \end{pmatrix},$$

et en déduire que

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, \ldots, s_n \\ y, s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} = N(x,y) N\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{n} N(x, s_k) N\begin{pmatrix} s_k, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_n \\ y, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_n \end{pmatrix}.$$

Définissons $C_n^{(j)}$ pour tout entier naturel non nul n, et tout entier j, $1 \leq j \leq n$, par

$$C_n^{(n)}(x, y; s_1, \ldots, s_n) = N\begin{pmatrix} x, s_1, \ldots, s_n \\ y, s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$$

et, pour tout $k = 1, \ldots, n-1$,

$$C_n^{(n-k)}(x, y; s_1, \ldots, s_{n-k}) = \int_a^b C_n^{(n-k+1)}(x, y; s_1, \ldots, s_{n-k+1})\, ds_{n-k+1}\,.$$

Posons aussi $\quad c_0(x,y) = N(x,y)$ et si $n \geq 1$, $\quad c_n(x,y) = \displaystyle\int_a^b C_n^{(1)}(x, y; s_1)\, ds_1$,

puis $\quad a_0 = 1$, et si $n \geq 1$, $\quad a_n = \displaystyle\int_a^b c_{n-1}(s,s)\, ds$.

8. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$c_n(x,y) = N(x,y) a_n - n \int_a^b N(x,s) c_{n-1}(s,y)\, ds\,.$$

(On intégrera chacun des termes de la formule obtenue en **7** par rapport à des variables judicieusement choisies, dans un ordre judicieusement choisi.)

9. Montrer que la série entière $D(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. (On pourra majorer $|a_n|$ en partant de la majoration $|N(x,y)| \leq M$ et utiliser l'inégalité de Hadamard rappelée dans le préambule).

10. On fixe $R > 0$. Pour tout entier n, majorer $\left|\dfrac{c_n(x,y)}{n!} z^n\right|$ pour tout $(x, y, z) \in [a,b] \times [a,b] \times \bar{D}(0, R)$ par une constante m_n qui soit le terme général d'une série convergente.

11. Considérons la série entière $S_{x,y}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n(x,y)}{n!} z^n$.

Établir l'égalité $S_{x,y}(z) = N(x,y) D(z) + z \displaystyle\int_a^b N(x,s) S_{s,y}(z)\, ds$.

12. En déduire que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $D(z) \neq 0$,

$$\phi_z(x) = f(x) + z \int_a^b \frac{S_{x,s}(z)}{D(z)} f(s)\, ds$$

est l'unique solution de l'équation intégrale (I_z).

* *
*