ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2009 FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Sur certaines matrices à déterminant positif et sur les matrices orthogonales

Pour n un entier $\geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{R}$. On note ${}^tM$ la matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n$. On note I_n la matrice identité et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales $n \times n$ à coefficients diagonaux dans l'ensemble $\{-1, 1\}$. On identifiera un vecteur de $\mathbf{R}^n$ avec la matrice colonne à n lignes correspondante, et une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ avec l'application linéaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $X \mapsto MX$.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n$. Soit Σ un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$. On note $M^{(\Sigma)}$ la sous-matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la i-ème colonne de M pour tout $i \in \Sigma$. Par convention, $M^{(\emptyset)} = M$. On note $\mathcal{M}_n^+$ l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{M}_n$ telles que, pour toutes les parties Σ de $[\![1, n]\!]$, les déterminants des matrices $M^{(\Sigma)}$ sont strictement positifs.

Soient $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On note $X \succeq Y$ (resp., $X \succ Y$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geqslant y_i$ (resp., $x_i > y_i$).

Première partie

1.a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n^+$, alors ${}^tM \in \mathcal{M}_n^+$.

1.b) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$, pour toute matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n$ et pour tout sous-ensemble Σ de $[\![1, n]\!]$, $M^{(\Sigma)} D^{(\Sigma)} = (MD)^{(\Sigma)}$.

1.c) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n^+$ et pour toute matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n$, $DMD \in \mathcal{M}_n^+$.

2. Montrer que, pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, il existe $D \in \mathcal{D}_n$ tel que $DX \succeq 0$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+$.

3.a) Soit $X = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $0 \succeq MX$. Montrer que si $X \succ 0$ alors $b \leqslant 0$ et $c \leqslant 0$.

3.b) Montrer que $X \succeq 0$ et $0 \succeq MX$ impliquent $X = 0$.

3.c) Montrer qu'il existe $X \in \mathbf{R}^2$, $X \succ 0$, tel que $MX \succ 0$. [On pourra distinguer les cas $b \geqslant 0$ et $b < 0$.]

Deuxième partie

Soit $k > 1$ un entier. On considère la série de fonctions d'une variable complexe z,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kn+1}\, z^{kn+1} \ .$$

4. Montrer que cette série converge pour tout $z \in \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbf{C}$. Soit $f(z)$ sa somme.

On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ en posant $z = x_1 + i\,x_2$ et $f(z) = u(x_1, x_2) + i\,v(x_1, x_2)$, où $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. On considère l'application $F : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^2$, définie par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto F(X) = \begin{pmatrix} u(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

5.a) Montrer que l'application F est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser ses dérivées partielles que l'on pourra exprimer en fonction du nombre complexe $\zeta = (x_1 + i\,x_2)^k$.

5.b) Soit J_F la matrice jacobienne de F. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{O}$, $J_F(X) \in \mathcal{M}_2^+$.

Troisième partie

On se propose de démontrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ suivante :

Si $P \in \mathcal{M}_n^+$ et $X \in \mathbf{R}^n$ sont tels que $X \succeq 0$ et $0 \succeq PX$, alors $X = 0$.

On fixe $n \geqslant 2$ et l'on suppose que la propriété $(\mathcal{Q}_{n-1})$ est satisfaite. Soit $P \in \mathcal{M}_n^+$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $X \succeq 0$ et $0 \succeq PX$.

6.a) On considère l'équation linéaire $P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $u_1 > 0$.

6.b) Soit $C = {}^t(c_1, \ldots, c_n)$ la première colonne de P^{-1}. Montrer que $c_1 > 0$ et que

$$m = \inf \left\{ \frac{x_i}{c_i} \mid c_i > 0, i \in [\![1, n]\!] \right\}$$

existe et est positif ou nul. On note j un entier tel que $m = \dfrac{x_j}{c_j}$.

6.c) On pose $Y = X - mC$. Montrer que $Y \succeq 0$ et que $0 \succeq PY$.

6.d) Soit $\widetilde{P} = P^{(\{j\})} \in \mathcal{M}_{n-1}$ et soit $\widetilde{Y} \in \mathbf{R}^{n-1}$ le vecteur obtenu à partir de Y en supprimant la j-ème ligne. Montrer que $\widetilde{Y} = 0$ et en déduire que $Y = 0$.

6.e) En déduire que $PX \succeq 0$.

6.f) Conclure.

Quatrième partie

On se propose de démontrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante :

Pour toute matrice orthogonale $M \in O(n)$, il existe $X \succ 0$ dans $\mathbf{R}^n$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n$ tels que $MX = DX$.

Un tel couple (D, X) sera appelé une solution pour M.

7. Étudier $(\mathcal{P}_n)$ pour $n = 1$ et pour $n = 2$. [Pour $n = 2$, on pourra supposer d'abord que M est la matrice d'une rotation d'angle θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, et chercher un vecteur $X \in \mathbf{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.]

8. Soient X_1 et $X_2 \in \mathbf{R}^n$ tels que $X_1 \succ 0$ et $X_2 \succ 0$. Montrer que si $D \in \mathcal{D}_n$ satisfait ${}^tX_1 D X_2 = {}^tX_1 X_2$, alors $D = \mathrm{I_n}$. En déduire que si (D_1, X_1) et (D_2, X_2) sont deux solutions pour $M \in O(n)$, alors $D_1 = D_2$.

On fixe $n \geqslant 2$ et l'on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ est satisfaite. On fixe une matrice orthogonale $M \in \mathcal{M}_n$ que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} W & U \\ {}^tV & \rho \end{pmatrix}$ où $W \in \mathcal{M}_{n-1}$, $U, V \in \mathbf{R}^{n-1}$ et $\rho \in \mathbf{R}$.

9.a) Écrire les relations entre W, U, V et ρ qui expriment que M est une matrice orthogonale. Montrer que $|\rho| \leqslant 1$.

9.b) Lorsque $|\rho| = 1$, montrer que W est orthogonale et construire une solution pour M à partir d'une solution pour W.

On suppose désormais que $|\rho| < 1$ et l'on pose $M_1 = W + \frac{1}{1-\rho} U\,{}^tV$ et $M_2 = W - \frac{1}{1+\rho} U\,{}^tV$.

10. Démontrer que M_1 et M_2 sont orthogonales.

11. Soit (D_1, X_1) (resp., (D_2, X_2)) une solution pour M_1 (resp., M_2).

11.a) Montrer que
$$ {}^tX_2 D_2 D_1 X_1 = {}^tX_2 X_1 - \sigma\,({}^tVX_1)({}^tVX_2)\ , $$
où σ est une constante positive que l'on déterminera en fonction de ρ.

11.b) On suppose que $D_1 \neq D_2$. Montrer que les réels ${}^tVX_1$ et ${}^tVX_2$ sont non nuls et de même signe. Montrer que l'on peut construire une solution (D, X) pour M telle que X est l'un des vecteurs $\begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho}\,{}^tVX_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho}\,{}^tVX_2 \end{pmatrix}$.

11.c) On suppose que $D_1 = D_2$. Montrer que l'un des réels ${}^tVX_1$ ou ${}^tVX_2$ est nul. En déduire qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{D}_n$ et un vecteur $X \succeq 0$ tel que $x_i > 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ satisfaisant $MX = DX$.

11.d) On suppose encore que $D_1 = D_2$. Montrer qu'il existe une matrice $D' \in \mathcal{D}_n$ et un vecteur $X' \succeq 0$ tel que $x'_i > 0$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ satisfaisant $MX' = D'X'$.

12.a) Construire une solution pour M. [On pourra considérer l'égalité $M(X+X') = DX + D'X'$ et utiliser le fait que M est orthogonale pour montrer que l'on peut se ramener au cas où $D = D'$.]

12.b) Conclure.

13. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique.

13.a) Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle de N parmi toutes les valeur propres complexes. En déduire que $\mathrm{I}_n + N$ est inversible.

13.b) On pose $M = (\mathrm{I}_n + N)^{-1}(\mathrm{I}_n - N)$. Montrer que M est orthogonale.

13.c) Soit (D, X) une solution pour M. Montrer que $Y = X + DX$ satisfait $Y \succeq 0$, $NY \succeq 0$ et $Y + NY \succ 0$.

14. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n$. En considérant une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{2n}$ adaptée, montrer qu'une des propriétés suivantes est vraie :

- soit les inégalités larges $0 \succeq {}^tPY$ et $Y \succeq 0$ ont une solution non nulle dans $\mathbf{R}^n$,
- soit les inégalités strictes $PX \succ 0$ et $X \succ 0$ ont une solution dans $\mathbf{R}^n$.

15. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n^+$. Montrer que les inégalités strictes $PX \succ 0$ et $X \succ 0$ ont une solution dans $\mathbf{R}^n$.

* *
*