Corrigé du problème X PC 2007

Problème isopérimétrique

1°) Les coefficients de Fourier de f'' s'obtiennent par intégration par parties :

$$c_n(f'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f''(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[e^{-int} f'(t)\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par périodicité des fonctions, le crochet est nul, et on a en recommençant :

$$c_n(f'') = \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[i\,n\,e^{-int} f(t)\right]_0^{2\pi} + (i\,n)^2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a ainsi obtenu $c_n(f'') = (i\,n)^2\,c_n(f) = -n^2\,c_n(f)$.
La fonction f étant de classe C^2, on sait que sa série de Fourier converge normalement, mais aussi en moyenne quadratique, vers f.

2°) Le noyau de P est constitué des fonctions de E telles que $f + f'' = 0$.
Il s'agit des fonctions $x \longrightarrow A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$, qui appartiennent bien à E.

3°)a) L'orthogonal de E est constitué des fonctions $f \in F$ telles que $\forall\, g \in E$, $\langle f, g\rangle = 0$.
En particulier, f est donc orthogonale aux fonctions $x \longrightarrow e^{inx}$, ce qui implique la nullité des coefficients de Fourier de f, donc la nullité de f d'après l'égalité de Parseval. Ainsi, l'orthogonal de E dans F se réduit à la fonction nulle.

3°)b) Montrons maintenant que P est auto-adjoint :

$$\langle f'', g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\big[f'(t)\,g(t)\big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par périodicité des fonctions, le crochet est nul, et on a en recommençant :

$$\langle f'', g\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{-1}{2\pi}\big[f(t)\,g'(t)\big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g''(t)\,\mathrm{d}t.$$

De nouveau le crochet est nul et on en déduit que $\langle f'', g\rangle = \langle f, g''\rangle$, et donc que :

$$\langle P(f), g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f'', g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, g''\rangle = \langle f, P(g)\rangle.$$

3°)c) Les éléments de $E \cap (\mathrm{Im}(P))^{\perp}$ sont les fonctions $f \in E$ telles que :

$$\forall\, g \in E,\quad \langle f, P(g)\rangle = \langle P(f), g\rangle = 0.$$

Ce sont les fonctions f telles que $P(f)$ est orthogonale à E, donc telles que $P(f) = 0$ d'après (a), et ce sont donc les fonctions de $\mathrm{Ker}(P)$, d'où l'égalité $E \cap (\mathrm{Im}(P))^{\perp} = \mathrm{Ker}(P)$.

4°) Deux fonctions continues 2π-périodiques f, g sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients de Fourier, comme cela résulte de l'égalité de Parseval ci-dessous :

$$\|f-g\|_2^2 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f-g)\,(t)|^2\,\mathrm{d}t \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f-g)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2.$$

Traduisons l'égalité $f(x+\pi)+f(x)=f(0)+f(\pi)$ par celle des coefficients de Fourier :

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}(f(t+\pi)+f(t))\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}(f(\pi)+f(0))\,\mathrm{d}t.$$

On note d'abord, puisque les fonctions intégrées sont 2π-périodiques, qu'on a pour $n\neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\, f(t+\pi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(u-\pi)}\, f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inu}\, f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le premier membre est égal à $(1+(-1)^n)\,c_n(f)=0$, soit $2\,c_{2p}(f)$ si $n=2\,p$ est pair.

Le second membre est nul sauf pour $n=0$, où il vaut $f(\pi)+f(0)$.

L'égalité proposée équivaut par conséquent à $c_0(f)=\frac{f(\pi)+f(0)}{2}$ et $c_{2p}(f)=0$ si $p\neq 0$.

5°)a) Si $f=1$, on a $\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{u_t}$, de sorte que le support Γ_f de l'arc est le cercle-unité.

5°)b) La tangente à l'arc en $M(t)$ est dirigée par :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t)=(f(t)+f''(t))\,\overrightarrow{v_t}=(f(t)+f''(t))\,(-\sin(t)\,\overrightarrow{e_1}+\cos(t)\,\overrightarrow{e_2}).$$

Comme $f(t)+f''(t)>0$, la tangente est dirigée par $\overrightarrow{v_t}$ et son équation cartésienne est :

$$\begin{vmatrix} x-f(t)\cos(t)+f'(t)\sin(t) & -\sin(t)\\ y-f(t)\sin(t)-f'(t)\cos(t) & \cos(t)\end{vmatrix} \;=\; x\cos(t)+y\sin(t)-f(t)=0.$$

5°)c) Comme $f(t)>0$, la distance de cette tangente à l'origine est $f(t)$.

On rappelle en effet que la distance de $M_0(x_0,\,y_0)$ à la droite $\mathcal{D}: u\,x+v\,y+h=0$ est :

$$d(M_0,\,\mathcal{D}) \;=\; \frac{|u\,x_0+v\,y_0+h|}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

6°) Si $f(t)=\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t)=\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\;\overrightarrow{u_t}+\frac{\left(b^2-a^2\right)\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}\,\overrightarrow{v_t}.$$

Par conséquent, on a dans le repère $(O;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2})$:

$$X(t)=a\,\frac{a\cos(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}\quad,\quad Y(t)=b\,\frac{b\sin(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}.$$

On en déduit que $X=a\cos(\theta)$ et $Y=b\sin(\theta)$, où $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les deux réels (dont la somme des carrés est bien égale à 1) définis par :

$$\cos(\theta)=\frac{a\cos(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}\quad,\quad \sin(\theta)=\frac{b\sin(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}.$$

Lorsque t décrit $[0,\,\pi/2]$, on voit que θ décrit aussi $[0,\,\pi/2]$.

Par symétrie, θ décrit aussi $[0,\,2\,\pi]$ lorsque t décrit $[0,\,2\,\pi]$ et Γ_f est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

7°)a) Comme $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\,\overrightarrow{u_t} + f'(t)\,\overrightarrow{v_t}$, et comme on sait aussi que $f(t) > 0$, il existe dans la base $(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{v_t})$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{OM}(t)\right)$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Cette mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{OM}(t)\right)$, qui est donc caractérisée par sa tangente, est égale à :

$$\left(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{OM}(t)\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right).$$

Ainsi, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}(t)\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_t}) + \left(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{OM}(t)\right)$ est $t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ et :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}\,\left(\cos\left(t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\right)\overrightarrow{e_2}\right).$$

7°)b) La fonction $t \longrightarrow \theta(t) = t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ est strictement croissante car :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\right) = 1 + \frac{f''(t)\,f(t) - f'^2(t)}{f^2(t) + f'^2(t)} = \frac{f(t)\,(f(t) + f''(t))}{f^2(t) + f'^2(t)} > 0.$$

La fonction $t \longrightarrow \theta(t) = t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ est continue et strictement croissante de $[0, 2\pi]$ sur $\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right), 2\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(2\pi)}{f(2\pi)}\right) = 2\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\right]$ par 2π-périodicité de f, et elle réalise une bijection de $[0, 2\pi]$ sur $\theta([0, 2\pi]) = \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right), 2\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\right]$, c'est à dire sur un intervalle de longueur exactement égale à 2π.

On peut donc toujours choisir l'angle polaire d'une demi-droite d'origine O dans $\theta([0, 2\pi])$ et on en déduit que pour toute direction donnée d'angle polaire α appartenant à $\theta([0, 2\pi])$, il existe une unique valeur $t = \theta^{-1}(\alpha) \in [0, 2\pi[$ telle que $\theta(t) = t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) = \alpha$.

Ainsi, la demi-droite d'angle polaire α coupe Γ_f en ce point $M(t)$ et en celui-ci seulement.

8°) D'après le calcul effectué en 5.b), la longueur $L(f)$ de Γ_f est égale à :

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (f(t) + f''(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\,c_0(f).$$

En effet, l'intégrale de f'' vaut $f'(2\pi) - f'(0) = 0$, qui est nulle par 2π-périodicité de f.

9°)a) L'aire $A(f)$ du domaine $\Omega(f)$ peut ici être calculée à l'aide d'une formule dérivée de la formule de Green-Riemann :

$$A(f) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_f} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Or $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\,\overrightarrow{u_t} + f'(t)\,\overrightarrow{v_t} = (f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t))\,\overrightarrow{e_1} + (f(t)\sin(t) + f'(t)\cos(t))\,\overrightarrow{e_2}$:

$$A(f) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_f} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\,(f(t) + f''(t))\,\mathrm{d}t = \pi\,\langle P(f), f\rangle.$$

9°)b) La formule de Parseval pour le produit scalaire donne alors :

$$A(f) = \pi \langle P(f),\, f\rangle \;=\; \pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{c_n\,(P\,(f))}\, c_n(f).$$

Et on déduit de la question 1°) que $c_n(P(f)) = c_n(f) + c_n(f'') = \left(1 - n^2\right) c_n(f)$, d'où :

$$A(f) = \pi \langle P(f),\, f\rangle \;=\; \pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 - n^2\right) |c_n(f)|^2.$$

Comme la fonction f est réelle, on remarque de plus que $\overrightarrow{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.
On en déduit donc que $|c_n(f)| = |c_{-n}(f)|$, ce qui implique :

$$A(f) = \pi \langle P(f),\, f\rangle \;=\; \pi \left(|c_0(f)|^2 - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2 - 1\right) |c_n(f)|^2 \right).$$

On pose dans toute la suite : $\boxed{c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\,(t)\, \mathrm{d}t = c}$, et le nombre réel c est positif.

10°) L'appartenance de f à E_c équivaut à l'appartenance de f à E avec $c = \; c_0(f) \geq 0$:

$$\langle P(f),\, f\rangle \;=\; c^2 - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2 - 1\right) |c_n(f)|^2.$$

On en déduit que l'expression $\langle P(f),\, f\rangle$ a pour maximum c^2, ce maximum étant atteint pour les fonctions de E_c telles que $c_k(f) = 0$ pour $k \geq 2$, c'est à dire pour les fonctions :

$$f(t) = c + c_1\, e^{i\,t} + \overline{c_1}\, e^{-i\,t} \quad \text{ou} \quad c + a\cos(t) + b\sin(t), \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

11°) Pour $f \in E$ vérifiant i) et ii), on a $c = c_0(f) \geq 0$, et 8°), 9°) et 10°) impliquent donc :

$$A(f) = \pi \langle P(f),\, f\rangle \;\leq\; \pi\, c_0^2(f) = \frac{L^2(f)}{4\,\pi}.$$

L'égalité est donc réalisée pour $f(t) = c + a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, c'est à dire pour $\overrightarrow{OM}(t) = (c + a\cos(t) + b\sin(t))\, \overrightarrow{u_t} + (-a\sin(t) + b\cos(t))\, \overrightarrow{v_t}$, ou encore :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (a + b + c\cos(t))\, \overrightarrow{e_1} + (b + c\sin(t))\, \overrightarrow{e_2}.$$

Il s'agit ici du cercle centré en $(a + b,\, b)$ et de rayon c avec a, b, c quelconques et $c \geq 0$.

Les courbes Γ_f réalisant l'égalité $A(f) = \frac{L^2(f)}{4\pi}$ sont par conséquent les cercles.

12°)a) Pour $h \in \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Vect}(\cos,\, \sin)$, il est clair que $c_0(h) = 0$.
Pour $f \in E$ et $h \in \mathrm{Ker}(P)$, on a donc $L(f) = 2\,\pi\, c_0(f)$ et $c_0(h) = 0$, d'où :

$$L(f + h) = \; 2\,\pi\, c_0(f + h) = 2\,\pi\, c_0(f) + 2\,\pi\, c_0(h) = L(f).$$

On a d'autre part $A(f) = \; \pi \langle P(f),\, f\rangle$ et on en déduit par linéarité et symétrie de P :

$$A(f + h) = \; \pi \langle P(f) + P(h),\, f + h\rangle = \pi \langle P(f),\, f\rangle + 2\,\pi \langle f,\, P(h)\rangle + \langle P(h),\, h\rangle.$$

Comme $h \in \mathrm{Ker}(P)$, on en déduit que $A(f + h) = \pi \langle P(f),\, f\rangle = A(f)$.

12°)b) La courbe Γ_{f+h} se déduit de la courbe Γ_f par translation car on a :

$$\overrightarrow{OM_{f+h}}(t) = (f(t) + h(t))\,\overrightarrow{u_t} + (f'(t) + h'(t))\,\overrightarrow{v_t} \;=\; \overrightarrow{OM_f}(t) + \overrightarrow{OM_h}(t) = \overrightarrow{OM_f}(t) + \vec{V}$$

En effet, comme $h \in \mathrm{Ker}(P)$, on a $h(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$ et un calcul simple montre que :

$$\overrightarrow{OM_h}(t) = (\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))\,\overrightarrow{u_t} + (-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t))\,\overrightarrow{v_t} \;=\; \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} \;=\; \vec{V}.$$

13°) Pour $r \geq 0$, on a donc $L(f + r) = L(f) + 2\pi\, c_0(r) = L(f) + 2\pi\, r$.
En revanche, comme la fonction constante r n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(P)$, la formule établie à la question précédente ne s'applique plus, mais le caractère linéaire et symétrique de P avec les égalités évidentes $P(r) = r$ et $\langle r, f\rangle = r\langle 1, f\rangle = r\,c_0(f) = r\,L(f)/2\pi$ donne :

$$A(f + r) = \pi\,\langle P(f) + P(r),\, f + r\rangle = \pi\,\langle P(f) + r,\, f + r\rangle = A(f) + r\,L(f) + \pi\, r^2.$$

14°)a) La projection orthogonale d'un point M sur D_θ est le point P défini par :

$$\overrightarrow{OP} \;=\; \left\langle \overrightarrow{u_\theta},\, \overrightarrow{OM} \right\rangle \overrightarrow{u_\theta}.$$

Par conséquent, le projeté orthogonal de $M(t)$ sur D_θ est le point $P(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OP}(t) \;=\; \langle \overrightarrow{u_\theta},\, f(t)\,\overrightarrow{u_t} + f'(t)\,\overrightarrow{v_t}\rangle\,\overrightarrow{u_\theta} \;=\; (f(t)\cos(t-\theta) - f'(t)\sin(t-\theta))\,\overrightarrow{u_\theta}.$$

Comme la fonction $t \longrightarrow f(t)\cos(t-\theta) - f'(t)\sin(t-\theta)$ est continue, l'image de $[0, 2\pi]$ est un segment de $\mathbb{R}$, ce qui prouve bien que la projection de Γ_f sur D_θ est un segment, et pour obtenir sa longueur, on étudie les extrema de $t \longrightarrow f(t)\cos(t-\theta) - f'(t)\sin(t-\theta)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(f(t)\cos(t-\theta) - f'(t)\sin(t-\theta)) \;=\; -(f(t) + f''(t))\sin(t-\theta).$$

Comme $f + f'' > 0$, cette dérivée s'annule en θ et $\theta + \pi$ modulo 2π, et cette dérivée étant négative sur $[\theta, \theta + \pi]$ et positive sur $[\theta + \pi, \theta + 2\pi]$, on voit que le maximum est atteint en θ et le minimum en $\theta + \pi$, de sorte que la longueur de la projection orthogonale de Γ_f sur D_θ, qui est la différence entre ce maximum et ce minimum, est $f(\theta) + f(\theta + \pi)$.

14°)b) Cette longueur $f(\theta) + f(\theta + \pi)$ est constante si et seulement si cette fonction reste égale à sa valeur en 0, c'est à dire si et seulement si : $\forall\,\theta,\ f(\theta) + f(\theta + \pi) = f(0) + f(\pi)$.
D'après 4°, ceci a lieu si et seulement si $c_0(f) = \frac{f(\pi)+f(0)}{2}$ et $c_{2p}(f) = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

14°)c) Dans ce cas où le diamètre apparent est constant, on a donc :

$$L(f) = 2\pi\, c_0(f) = \pi(f(\pi) + f(0)) = \pi\, l.$$

Les conditions $c_0(f) = \frac{f(\pi)+f(0)}{2}$, ou $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \pi(f(0) + f(\pi))$, et $c_{2p}(f) = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$ sont réalisées si la fonction f est constante, $f(t) = R$, et c'est le cas des cercles de centre O.
Mais c'est aussi le cas pour d'autres fonctions, comme les suivantes pour $0 < r < R$:

$$f(t) = R + r\sin(t).$$

Et cette fonction est bien dans E et vérifie i) et ii) pour $0 < r < R$ car $f > 0$ et $f + f'' > 0$.
Enfin, on a bien aussi $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \pi(f(0) + f(\pi))$, et $c_{2p}(f) = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

15°) Montrons que pour M_1 et M_2 appartenant à Γ_f, alors le segment $M_1 M_2$ est inclus dans $\Omega(f)$, ce qui implique d'ailleurs la convexité de $\Omega(f)$.
Considérons donc un point $M(t)$ situé entre M_1 et M_2 et vérifions que tous les points $M(\tau)$ de la courbe Γ_f (qu'on obtient donc pour $t-\pi \leq \tau \leq t+\pi$) sont situés d'un même côté de la tangente à Γ_f en $M(t)$, dont une équation est d'après la question 5.b) :

$$x\cos(t) + y\sin(t) - f(t) = 0.$$

Les coordonnées dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ d'un point $M(\tau)$ de Γ_f sont :

$$X(\tau) = f(\tau)\cos(\tau) - f'(\tau)\sin(\tau) \quad ; \quad Y(\tau) = f(\tau)\sin(\tau) + f'(\tau)\cos(\tau).$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation de la tangente en $M(t)$, on obtient :

$$\varphi(\tau) = (f(\tau)\cos(\tau) - f'(\tau)\sin(\tau))\cos(t) + (f(\tau)\sin(\tau) + f'(\tau)\cos(\tau))\sin(t) - f(t).$$

Ce qui donne après simplification $\varphi(\tau) = f(\tau)\cos(\tau - t) - f'(\tau)\sin(\tau - t) - f(t)$, et :

$$\varphi'(\tau) = -(f(\tau) + f''(\tau))\sin(\tau - t).$$

Comme $f + f'' > 0$, cette dérivée est positive sur $[t-\pi, t]$ et négative sur $[t, t+\pi]$, et $\tau \longrightarrow \varphi(\tau) = f(\tau)\cos(t-\tau) - f'(\tau)\sin(t-\tau) - f(t)$ est maximale en t où elle vaut 0.
En reportant donc dans l'équation de la tangente en $M(t)$ les coordonnées d'un point $M(\tau)$, on obtient une expression toujours négative, ce qui prouve bien que tous ces points sont dans un même demi-plan délimité par cette tangente en $M(t)$. Comme ce demi-plan est convexe, et comme il contient les points M_1 et M_2, il contient donc le segment $M_1 M_2$.