

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Polynômes orthogonaux et équations différentielles

Première partie

Dans cette partie on désigne par E un espace préhilbertien réel, par $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire et par $\| \cdot \|$ la norme correspondante. On note F^\perp le sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie F de E .

1. Dans cette question on suppose E de dimension finie, on se donne un sous-espace vectoriel F de E , un vecteur v de E n'appartenant pas à F , et un nombre réel $\alpha > 0$. On note π le projecteur orthogonal $E \rightarrow F$.

Construire un élément u de F et un réel λ tels que l'élément $u + \lambda v$ soit orthogonal à F et satisfasse les deux conditions suivantes :

$$(u + \lambda v | v) > 0, \|u + \lambda v\| = \alpha.$$

Démontrer l'unicité du couple (u, λ) et comparer $u + \lambda v$ avec la projection orthogonale de v sur F^\perp .

2. Soit n un entier, $n \geq 1$. Soit (v_0, v_1, \dots, v_n) une famille libre de vecteurs de E et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de nombres réels strictement positifs. Pour tout p , $0 \leq p \leq n$, on désigne par E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (v_0, v_1, \dots, v_p) . Montrer qu'il existe une unique base (w_0, w_1, \dots, w_n) de E_n vérifiant les conditions suivantes : $w_0 \in E_0$; pour tout p , $1 \leq p \leq n$, $w_p \in E_p \cap E_{p-1}^\perp$; pour tout p , $0 \leq p \leq n$, $(w_p | v_p) > 0$ et $\|w_p\| = \alpha_p$.

Deuxième partie

Dans cette partie on désigne par $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbf{R} non réduit à un point, par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$ formé des restrictions de fonctions polynomiales, et par E_n celui des restrictions de fonctions polynomiales de degré $\leq n$. On se donne une forme linéaire φ sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que $\varphi(f)$ soit positif ou nul si f est positive ou nulle, et strictement positif si de plus f n'est pas identiquement nulle. On note encore $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ une suite de nombres réels strictement positifs.

3. Démontrer les assertions suivantes :

a) La formule $(f|g) = \varphi(fg)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.

b) Il existe une unique suite de polynômes (P_0, P_1, \dots) de E satisfaisant les conditions suivantes :

- P_n appartient à E_n et le coefficient de x^n dans P_n , qu'on notera k_n , est strictement positif ;
- $\varphi(P_m P_n) = 0$ si $m \neq n$;
- $\varphi(P_n^2) = \alpha_n^2$.

4.a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \geq 2$, des réels A_n, B_n, C_n , tels que l'on ait

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x).$$

b) Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n-1} , puis C_n en fonction de $k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}$.

5. On se propose ici de démontrer que, pour $n \geq 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :

a) Il n'existe aucun zéro de P_n , contenu dans $]a, b[$, de multiplicité impaire ; dans ce cas, on calculera $\varphi(P_n)$;

b) Il existe de tels zéros, que l'on note a_1, \dots, a_r (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\varphi(Q_n)$ où $Q_n(x) = P_n(x)(x - a_1) \dots (x - a_r)$.

6. Dans cette question on fixe un entier $n \geq 1$; on note a_1, \dots, a_n les zéros de P_n ; pour tout G de E_{2n-1} , on écrit $G = Q P_n + R$ la division euclidienne de G par P_n .

a) Vérifier que Q et R appartiennent à E_{n-1} .

b) On définit des polynômes $L_i, i = 1, \dots, n$, par

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Vérifier que l'on a

$$R(x) = \sum_{i=1}^n R(a_i)L_i(x).$$

c) Déterminer des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que l'on ait, pour tout G de E_{2n-1} :

$$\varphi(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(a_i).$$

d) Quel est le signe de λ_i ?

Troisième partie

Dans cette partie on prend $[a, b] = [-1, 1]$, $\alpha_n = 1$ pour tout $n \geq 0$, et $\varphi(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$ pour tout f de $\mathcal{C}([-1, 1])$. On considère les fonctions F_n définies par $F_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$F_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

7. Préciser le degré de F_n et calculer $F_n(1), F'_n(1), F_n(-1), F'_n(-1)$. [On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant $\frac{d^n}{dx^n} \left((x+1)^n (x-1)^n \right)$].

8. Montrer que F_n est proportionnel au polynôme P_n introduit à la question 3.b). [On ne demande pas de préciser le coefficient de proportionnalité].

On désigne par $\mathcal{C}^2(]-1, 1[)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois continûment dérivables sur $] - 1, 1[$ et par T l'application linéaire de $\mathcal{C}^2(]-1, 1[)$ dans $\mathcal{C}(]-1, 1[)$ définie par

$$T(f)(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{df}{dx} \right).$$

9. Vérifier que $T(F_n)$ est proportionnel à F_n .

10. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme de E_n , restriction de T à E_n .

11. On fixe un nombre réel γ et on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$T(f) - \gamma f = 0 \tag{1}$$

qui sont développables en séries entières de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

a) Écrire une relation de récurrence entre c_k et c_{k+2} .

b) Étudier la convergence des deux séries entières, paire et impaire : $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p} x^{2p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1} x^{2p+1}$. Dire dans quels cas ce sont des polynômes et reconnaître ces polynômes.

c) Décrire l'espace des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(]-1, 1[)$.

d) Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ par l'intervalle fermé $[-1, 1]$?

* *
*