X PC 2003, corrigé de la deuxième épreuve.

Première partie

1. L'égalité $\mathrm{Det}\, A = \mathrm{Det}\, {}^tA$ donne ici $\mathrm{Det}\, A = (-1)^n \,\mathrm{Det}\, A$, d'où, si n impair, $\mathrm{Det}\, A = 0$.

2. Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ et $d_1, \dots d_m$ les éléments diagonaux de D . Soit $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$ et considérons la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_{m+1}, \dots, e_k, e_{m+k}, \dots, e_{2m-1}, e_{2m})$. On voit que chaque sous-espace vectoriel $Vect(e_k, e_{m+k})$ est stable pour l'endomorphisme $X \mapsto AX$ qui a donc dans la base $\mathcal{B}'$ pour matrice une matrice A' semblable diagonale par blocs :

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d_1 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -d_2 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -d_m \\ d_m & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

Les déterminants de A et A' sont les mêmes, et, par blocs : $\mathrm{Det}\, A = \mathrm{Det}\, A' = d_1^2.d_2^2 \cdots d_m^2 = (\mathrm{Det}\, D)^2$.

3. Pour tout $x \in E$, par définition de l'adjoint, on a :

$$0 = \big(x \mid f^2(x)\big) = \big(-f(x) \mid f(x)\big) = -\|f(x)\|^2 \quad ,$$

d'où par définie-positivité du produit scalaire, $f(x) = 0$, et par suite $f = 0$.

4.

a) Par hypothèse, $f^* f = -f f = id_E$, ce qui exprime bien que f est orthogonale.

b) Comme ci-dessus, en notant n la dimension de E , on déduit de $f^* = -f$ et de $\mathrm{Det}\, f^* = \mathrm{Det}\, f$ que $(-1)^n \,\mathrm{Det}\, f = \mathrm{Det}\, f$, or ici $\mathrm{Det}\, f = \pm 1 \neq 0$, donc nécessairement n est pair.

c) Pour tout vecteur $v \in E$ on a $\big(v \mid f(v)\big) = 0$: en effet, par $f^* = -f$ on a $\big(v \mid f(v)\big) = -\big(v \mid f(v)\big)$. De plus, $f(v)$ a même norme que v : $\big(f(v) \mid f(v)\big) = -\big(v \mid f^2(v)\big) = \big(v \mid v\big)$. On en déduit que, quand $v \neq 0$, v et $f(v)$ sont toujours indépendants.

d) Comme $f^2 = -v$, le sous-espace vectoriel $G = Vect\big(v, f(v)\big)$ est stable par f . Or, de $f^* = -f$ on déduit que si G_1 est un sous-espace vectoriel stable par f , alors $G_1^\perp$ est aussi stable par f . En effet, pour tout $x \in G_1^\perp$ et tout $y \in G_1$: $\big(f(x) \mid y\big) = \big(x \mid -f(y)\big) = 0$, ce qui prouve bien que $f(x)$ reste dans $G_1^\perp$. Ici, avec $F = G^\perp$ on a donc bien $f(F) \subset F$.

e) Montrons par récurrence sur $k \in [1, m]$ la proposition suivante :

$$\exists\, (v_1, \dots, v_k) \in E^k \text{ tels que le système } G_k = \big(v_1, \dots, v_k, f(v_1) \dots, f(v_k)\big) \text{ soit orthonormal.}$$

La proposition est vraie pour $k = 1$ puisque pour v de norme 1 , on a vu en **c)** que $f(v)$ est orthogonal à v et de norme 1 aussi.

Supposons la propriété vraie pour $k - 1 < m$, et montrons-la pour k . Comme la taille du système $G_k = \big(v_1, \dots, v_{k-1}, f(v_1) \dots, f(v_{k-1})\big)$ est $< n$, il existe un vecteur v non nul dans $\big(Vect(G_k)\big)^\perp$, qu'on peut supposer normé (quitte à diviser v par sa norme). Comme en **d)**, on voit que puisque G_k est (par $f^2 = -id_E$) stable par f , $f(v)$ reste dans $G_k^\perp$. Mais on a vu aussi que $f(v)$ est orthogonal à v et de même norme 1 , donc finalement $G_{k+1} = \big(v_1, \dots, v_{k-1}, v, f(v_1) \dots, f(v_{k-1}), f(v)\big)$ est un système orthonormal. Donc, par récurrence, G_m est orthonormal, ce qu'on voulait démontrer.

Par définition, la matrice de f dans cette base est : $Mat(f) = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$.

5.

a) L'endomorphisme $f^2 = -f^* f$ est auto-adjoint, donc à valeurs propres réelles et diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La décomposition en somme directe orthogonale $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ est donnée par le théorème spectral.

b) Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, e_i un vecteur propre associé à λ_i . On a, par définition : $\lambda_i\big(e_i \mid e_i\big) = \big(e_i \mid f^2(e_i)\big) = -\big(f(e_i) \mid f(e_i)\big)$, d'où, puisqu'un vecteur propre est non nul, $\|e_i\|^2 > 0$ et $\lambda_i = -\dfrac{\|f(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2} \leqslant 0$.

c) Soit x un vecteur quelconque de E_i : on a $f^2(x) = \lambda_i.x$, d'où en composant par f , et par linéarité de f , $f^3(x) = f^2\big(f(x)\big) = \lambda_i.f(x)$, ce qui sgnifie bien que $f(x) \in E_i$. Par suite, $f(E_i) \subset E_i$.

6.

a) Toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$ est associée à un endomorphisme $f\ : X \mapsto AX$ antisymétrique dans $\mathbb{R}^{2m}$ euclidien canonique. Par **5.**, $\mathbb{R}^{2m}$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels E_i , stables par f , propres pour f^2 . Ainsi, l'endomorphisme $g_i = f_{\big|E_i}$ garde les mêmes propriétés d'antisymétrie que f (par restriction de l'égalité $\big(x \mid f(y)\big) = -\big(f(x) \mid y\big)$ aux vecteurs de E_i , et vérifie $g_i^2 = \lambda_i.id_{E_i}$ avec $\lambda_i \leqslant 0$. On peut donc, soit appliquer le **3.** si $\lambda_i = 0$, et dans ce cas $g_i = 0$, soit appliquer le **4.** à $h_i = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} g_i$ car h_i vérifie bien $h_i^2 + id_{E_i} = 0$ et trouver une base orthonormale B_i où la matrice de h_i est $\begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$, ce qui donne pour matrice de g_i , $Mat_{B_i}(g_i) = Mat(f_{\big|E_i}) = \begin{pmatrix} 0_m & -\sqrt{-\lambda_i} I_m \\ \sqrt{-\lambda_i} I_m & 0_m \end{pmatrix}$. Remarquons que le cas $\lambda_i = 0$ ne peut arriver qu'une fois (les λ_i sont distinctes).

Une concaténation des bases B_i donne alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, avec un bloc éventuel nul, celui-ci étant de plus d'ordre pair puisque tous les autres le sont et que l'ordre total est pair. De plus, chaque base B_i est faite de deux parties égales, en général $B_i = \big(U_i, V_i = f(U_i)\big)$, sauf pour le cas particulier éventuel $\lambda_i = 0$ où on la coupe arbitrairement en deux sous-systèmes de même cardinal, (U_{i_0}, V_{i_0}) . En réordonnant la base $\mathcal{B}$ en commençant par concaténer les U_i puis en concaténant seulement après les V_i on obtient finalement une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} \quad ,$$

D étant une matrice diagonale avec des $\sqrt{-\lambda_i}$ sur la diagonale. Cette propriété se traduit bien par l'égalité $A = {}^tQ \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q$, où $Q^{-1} = {}^tQ$ est la matrice orthogonale correspondant au changement de base orthonormée (base canonique $\rightarrow$ base $\mathcal{B}'$) indiqué.

b) Avec les notations ci-dessus, on constate que la matrice $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme le produit $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Ainsi, l'égalité du **a)** peut se réécrire en $A = \underbrace{{}^tQ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{{}^tM} \times J_{2m} \times \underbrace{\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q}_{M}$, cqfd avec $M = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q$. *(Remarquons que $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} Q$ convenait aussi).*

Deuxième partie

7.

a) Classique : vient de $\omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = 0$, qu'on développe par linéarité par rapport aux variables n°i et n°$(i+1)$.

b) Pour $k \in [1, q-1]$, on montre par récurrence sur k la propriété P_k :
« pour tout $i \in [1, q-k]$, $\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k}, \ldots, x_q) = 0$ dès que $x_{i+k} = x_i$ » .
P_1 est vrai par hypothèse. Si P_{k-1} est vraie, alors, quand $x_i = x_{i+k}$ on a par la **a)** ci-dessus :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k-1}, x_i, \ldots, x_q) &= -\,\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, x_{i+k-1}, \ldots, x_q) \\ &\overset{P_{k-1}}{=} 0 \ . \end{aligned}$$

c) C'est clairement un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de E^q dans $\mathbb{R}$ (les propriétés de multilinéarité et d'alternance restent stables par combinaison linéaires, la forme nulle est q-linéaire alternée).

d) Par le cours, c'est la forme $(x_1, \ldots, x_q) \mapsto \mathrm{Det}_B(x_1, \ldots, x_q)$, le déterminant étant calculé dans une base B quelconque, fixée, de E . (Elle est bien non nulle par $\mathrm{Det}_B(B) = 1$).

8.

a) Par définition : $\omega^{(2)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\omega(x_1,x_2).\omega(x_3,x_4)-\omega(x_1,x_3).\omega(x_2,x_4)+\omega(x_1,x_4).\omega(x_2,x_3)$.
La linéarité de $\omega^{(2)}$ par rapport à chaque variable x_j est claire, puisque, dans chacun des trois termes ci-dessus, la variable x_j apparaît dans un facteur $\omega(\ .\ ,\ .\ )$ et un seul et que ω est bilinéaire.
Vérifions l'alternance. Elle résulte de l'anti-symétrie de ω , en effet :
- si $x_1=x_2$, le premier terme est nul, les deux suivants se détruisent car opposés l'un de l'autre ;
- si $x_2=x_3$, le troisième terme est nul, les deux premiers se détruisent car opposés l'un de l'autre ;
- si $x_3=x_4$, le premier terme est nul, les deux suivants se détruisent car opposés l'un de l'autre.

b) On raisonne par récurrence sur p , le cas $p=2$ étant acquis par ci-dessus. Supposons donc que $\omega^{(p-1)}$ soit dans Alt_{2p-2} et utilisons la formule de définition de $\omega^{(p)}$ que nous écrivons classiquement sous la forme :

$$\omega^{(p)}(x_1,\ldots,x_{2p})=\sum_{i=2}^{2p}(-1)^i\omega(x_1,x_i).\omega^{(p-1)}(x_2,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{2p})\qquad(1)\quad .$$

<u>Linéarité par rapport à chaque x_i</u> : acquise par somme d'applications linéaires, puisque x_i apparaît dans un et un seul des deux facteurs de chaque terme de la somme (1) ci-dessus, et que ce facteur est linéaire en x_i .
<u>Propriété d'alternance</u> : on commence par le cas $x_i=x_{i+1}$, $i\geqslant 2$. Dans ce cas, tous les termes de (1) sauf deux sont nuls, il ne reste que :

$$\omega^{(p)}(x_1,\ldots,x_{2p})=(-1)^i\omega(x_1,x_i).\omega^{(p-1)}(\ldots,x_{i+1},\ldots)+(-1)^{i+1}\omega(x_1,x_{i+1}).\omega^{(p-1)}(\ldots,x_i,\ldots)\quad ,$$

et ces deux termes se détruisent quand $x_i=x_{i+1}$.
Reste le cas de $x_1=x_2$. Le premier terme de (1) disparaît, il reste, en re-développant :

$$\begin{aligned}\omega^{(p)}(x_1,\ldots,x_{2p})&=\sum_{i=3}^{2p}(-1)^i\omega(x_1,x_i).\omega^{(p-1)}(x_2,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{2p})\\&=\sum_{i=3}^{2p}(-1)^i\omega(x_1,x_i)\cdot\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq i}}(-1)^{s_j}\omega(x_2,x_j).\omega^{(p-2)}(\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots)\qquad(2)\quad .\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, le symbole s_j désigne $j-1$ si $j<i$ (en effet, il n'y a plus la variable x_1 dans $\omega^{(p-1)}$, donc le rang de la variable x_j est $j-1$), et $j-2$ si $j>i$ (en effet, alors, le rang de x_j est décalé encore de 1 puisque x_j apparaît après x_i qui a été supprimée). On voit donc que, dans la somme (2) ci-dessus, si $x_2=x_1$, un même couple (i,j) où $i\neq j$ apparaît dans deux termes identiques $(-1)^i\omega(x_1,x_i)(-1)^{s_j}\omega(x_1,x_j).\omega^{(p-2)}(\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots)$, mais qui sont de signes opposés. Donc, pour finir, la somme (2) est nulle et $\omega^{(p)}$ est bien alternée.

9. La bilinéarité est acquise par la linéarité de f et la bilinéarité du produit scalaire, l'anti-symétrie par la définition de $f^*=-f$.

10.

a) Comme $\omega_f^{(2m)}$ est dans Alt_{2m} , cette forme est proportionnelle à la forme (non nulle) $\mathrm{Det}(x_1,\ldots,x_{2m})$, d'où l'existence d'un coefficient de proportionnalité $P(A)$.

b) D'après ci-dessus, il suffit (toujours) de faire le calcul de $\omega_f^{(2m)}$ pour les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$, puisqu' alors leur déterminant vaut 1 . En appelant $(e_1,\ldots,e_{2m})$ les vecteurs de cette base, il vient :

$$\omega_f^{(2)}(e_1,e_2,e_3,e_4)=\big(e_1\mid f(e_2)\big).\big(e_3\mid f(e_4)\big)-\big(e_1\mid f(e_3)\big).\big(e_2\mid f(e_4)\big)+\big(e_1\mid f(e_4)\big).\big(e_2\mid f(e_3)\big)\quad ,$$

d'où par définition de la matrice de f et des composantes dans une base orthonormée, $P(A)=a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}$.

c) Comme avant, $P(A)=\omega_f^{(m)}(e_1,\ldots,e_{2m})$. Par la définition de f , seuls les termes $\omega_f(e_k,e_{m+k})=-d_k$, $1\leqslant k\leqslant m$, sont a priori non nuls, d'où :

$$P(A)=(-1)^{m+1}(-d_1)\omega_f^{(m-1)}(e_2,\ldots,e_m,e_{m+2},\ldots,e_{2m})=(-1)^m d_1.\omega_f^{(m-1)}(e_2,\ldots,\widehat{e_{m+1}},\ldots,e_{2m})\quad ,$$

et par une récurrence immédiate, $P(A)=(-1)^m d_1(-1)^{m-1}d_2\cdots(-1)^1 d_m=(-1)^{m(m+1)/2}\,\mathrm{Det}\,D$.

Troisième partie

11.

a) Clair : ${}^t\big({}^tMAM\big) = {}^tM{}^tAM = -{}^tMAM$.

b) Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^{2m}$ associés aux matrices respectives A et ${}^tMAM$, i.e. $f : X \mapsto AX$ et $g : X \mapsto {}^tMAM\,X$. On a que $\omega_g(x,y) = \big(x \mid {}^tMAMy\big) = \omega_f(Mx, My)$, puis, par une récurrence évidente en utilisant la définition :

$$\forall\, k \in [1,m] \quad \omega_g^{(k)}(x_1,\ldots,x_{2k}) = \omega_f^{(k)}(Mx_1,\ldots,Mx_k) \quad .$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\omega_g^{(m)}(x_1,\ldots,x_{2m}) &= \omega_f^{(m)}(Mx_1,\ldots,Mx_{2m})\\ &= P(A)\,\mathrm{Det}(Mx_1,\ldots,Mx_{2m})\\ &= P(A)\,\mathrm{Det}\,M\,\mathrm{Det}(x_1,\ldots,x_{2m}) \quad ,\end{aligned}$$

d'où, par définition du Pfaffien, $P({}^tMAM) = P(A)\,\mathrm{Det}\,M$.

12. Par **6.a)**, on a $A = {}^tQ\begin{pmatrix}0_m & -D\\ D & 0_m\end{pmatrix}Q$, d'où par **10.c)** et **11.b)** : $P(A) = \mathrm{Det}\,Q.(-1)^{m(m+1)/2}\,\mathrm{Det}\,D$, ce qui, vu $\mathrm{Det}\,Q = \pm 1$ (Q est orthogonale), et $\mathrm{Det}\,A = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}0_m & -D\\ D & 0_m\end{pmatrix} = \big(\mathrm{Det}\,D\big)^2$, implique bien $\big(P(A)\big)^2 = \mathrm{Det}\,A$.

13. On utilise **6.b)** : $A = {}^tMJ_{2m}M$. Par définition, $\prod(A) = \mathrm{Det}\,M\prod(J_{2m})$, tandis que $P(A) = \mathrm{Det}\,M.P(J_{2m}) = (-1)^{m(m+1)/2}\,\mathrm{Det}\,M$. On en déduit que $\prod(A) = (-1)^{m(m+1)/2}\prod(J_{2m}).P(A)$.

14. Par **11.b)**, on a $P(J_{2m}) = P({}^tMJ_{2m}M) = \mathrm{Det}\,M.P(J_{2m})$, et comme $P(J_{2m}) = \pm 1 \neq 0$, il en découle bien $\mathrm{Det}\,M = 1$.

15.

a) On écrit : $A = \begin{pmatrix}0_m & -{}^tB\\ B & 0_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tB & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0_m & -I_m\\ I_m & 0_m\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}B & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix}$, d'où par propriétés du Pfaffien et du déterminant :

$$P(A) = \mathrm{Det}(B).P(J_{2m}) = (-1)^{m(m+1)/2}(\mathrm{Det}\,B) \quad .$$

b) On commence par le cas $A_1 = J_{2m_1}$, $A_2 = J_{2m_2}$. La matrice obtenue se ramène (est semblable) à la matrice $J_{2(m_1+m_2)}$ lorsqu'on intervertit, dans la base canonique $(e_1,\ldots,e_{2m_1+2m_2})$, les vecteurs $e_{m_1+1},\ldots,e_{m_1+m_1}$ avec les vecteurs $e_{2m_1+1},\ldots,e_{2m_1+m_2}$. Cela correspond à un changement de base *orthonormée* de déterminant $(-1)^{m_1m_2}$ (on réalise en effet $m_1.m_2$ transpositions de vecteurs consécutifs). D'après la formule du **11.b)**, on a alors :

$$\begin{aligned}P\begin{pmatrix}J_{2m_1} & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & J_{2m_2}\end{pmatrix} &= (-1)^{m_1m_2}P\big(J_{2(m_1+m_2)}\big)\\ &= (-1)^{m_1m_2}(-1)^{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)/2} = (-1)^{m_1(m_1+1)/2}.(-1)^{m_2(m_2+1)/2} \quad .\end{aligned}$$

Dans le cas général, on écrit $A_1 = {}^tM_1J_{2m_1}M_1$ et $A_2 = {}^tM_2J_{2m_2}M_2$, d'où

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}A_1 & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tM_1J_{2m_1}M_1 & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & {}^tM_2J_{2m_2}M_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}{}^tM_1 & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & {}^tM_2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}J_{2m_1} & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & J_{2m_2}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}M_1 & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & M_2\end{pmatrix} \quad ,\end{aligned}$$

et par propriété du Pfaffien :

$$\begin{aligned}P(A) &= \mathrm{Det}\,M_1\,\mathrm{Det}\,M_2.P\begin{pmatrix}J_{2m_1} & 0_{2m_1,2m_2}\\ 0_{2m_1,2m_2} & J_{2m_2}\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{m_1(m_1+1)/2}\,\mathrm{Det}\,M_1.(-1)^{m_2(m_2+1)/2}\,\mathrm{Det}\,M_2\\ &= P(A_1).P(A_2)\ \blacksquare\end{aligned}$$

⁎
⁎ ⁎