X Maths 1 2003 — filière PC

Walter Appel

Première partie

♦ **1** L'équation **(1)** est une équation différentielle linéaire, du second ordre, homogène. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.

♦ **2** Les fonctions x_1 et x_2 étant de classe $\mathscr{C}^2$, leurs dérivées x_1' et x_2' sont de classe $\mathscr{C}^1$. On en déduit que la fonction $W(x_1, x_2)$ est également de classe $\mathscr{C}^1$. Dérivons cette fonction, on obtient

$$W'(x_1, x_2) = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_1''x_2 - x_1'x_2' = 0$$

ce qui montre que $W(x_1, x_2)(t)$ est indépendante de t.

♦ **3.a** Remarquons que l'opérateur de translation $\mathcal{T}$ et l'opérateur de dérivation commutent et que, notamment, pour toute fonction deux fois dérivables : $\mathcal{T}(f)'' = \mathcal{T}(f'')$

Soit maintenant f une solution de l'équation **(1)**. Notons $g = \mathcal{T}(f)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(t) + \big(\lambda - q(t)\big)\, g(t) &= f''(t+T) + \big(\lambda - q(t)\big)\, f(t+T) \\ &= f''(t+T) + \big(\lambda - q(t+T)\big)\, f(t+T) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.

♦ **3.b** τ est clairement un isomorphisme et il est inversible (fabriquer son inverse qui translate de $-T$!)

♦ **4.a** On invoque le théorème de Cauchy-Lipschitz

♦ **4.b** On remarque dans un premier temps que la famille (x_1, x_2) est libre. Montrons maintenant qu'elle est génératrice. Soit $y \in \mathcal{E}$ une solution de **(1)**. Posons $z = y(0)\,x_1 + y'(0)\,x_2$.

Alors z est solution de **(1)** et on a $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = y'(0)$. En d'autres termes, z et y sont solutions de la même équation différentielle linéaire d'ordre 2 et vérifient les mêmes conditions initiales. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $y = z$. On a donc montré que y est combinaison linéaire de x_1 et de x_2.

La famille (x_1, x_2) est donc une base de $\mathcal{E}$.

♦ **5.a** Notons $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme τ dans la base (x_1, x_2).

L'image par τ de la fonction x_1 est $\tau(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_2$. Évaluant cette expression en $t = 0$, on trouve

$$\alpha = \tau(x_1)(0) = x_1(T).$$

Évaluons maintenant la dérivée en $t = 0$:

$$\tau(x_1)'(0) = \alpha\, x_1'(0) + \beta\, x_2'(0) = \beta.$$

Puisque l'opérateur τ et la dérivation commutent, on a également $\tau(x_1)'(0) = x_1'(T)$ et donc $\beta = x_1'(T)$.

De même avec x_2, ce qui donne

$$M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}.$$

♦ **5.b** Le déterminant de cette matrice est égal au wronskien de (x_1, x_2) évalué en T :

$$\det M = x_1(T)\,x_2'(T) - x_2(T)\,x_1'(T) = W(x_1, x_2)(T) = W(x_1, x_2)(0) = x_1(0)\,x_2'(0) - x_2(0)\,x_1'(0) = 1.$$

♦ **5.c** $\Delta = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M) = \frac{1}{2}\big(x_1(T) + x_2'(T)\big)$

♦ **6** Les valeurs propres de τ sont les racines du polynôme caractéristique de τ, qui est

$$P(\rho) = \det(M - \rho I_2) = \begin{vmatrix} x_1(T) - \rho & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 2\Delta\,\rho + 1$$

♦ **7.a** On suppose Δ réel et $|\Delta| \neq 1$. Le discriminant réduit du polynôme P vaut $\Delta^2 - 1$. Il est donc non nul et, par conséquent, P admet deux racines distinctes. Puisque τ admet deux valeurs propres distinctes et que $\mathcal{E}$ est de dimension 2, τ est diagonalisable et, par conséquent : $\mathcal{E}$ est la somme des (deux) sous-espaces propres de τ.

♦ **7.b** On suppose $|\Delta| < 1$. Le discriminant réduit $D = \Delta^2 - 1$ de P étant négatif, P admet deux racines conjuguées

$$\rho = \Delta + \mathrm{i}\sqrt{1-\Delta^2} \qquad \text{et} \qquad \bar{\rho} = \Delta - \mathrm{i}\sqrt{1-\Delta^2}.$$

Le produit des racines étant égal au déterminant de M, à savoir 1, on peut conclure $|\rho|^2 = |\bar{\rho}|^2 = 1$.

Notons (u, v) une base de $\mathcal{E}$ formée de vecteurs propres de τ et montrons que u et v sont stables.

En premier lieu, remarquons que la restriction de u à $[\,0\,;T\,]$ est bornée (comme toute fonction continue sur un segment). Notons $A = \sup\limits_{t\in[\,0\,;T\,]} \big|u(t)\big|$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = E(t/T)$, de sorte que $t - nT \in [\,0\,;T\,]$. On peut alors écrire $u(t) = \tau^n(u)(t-nT) = \rho^n\, u(t-nT)$ donc $|u|$ est périodique, donc bornée, donc stable. Idem pour v. Toute combinaison linéaire de u et v est donc stable.

Montrons maintenant que u n'est pas fortement stable. En tant que fonction propre, u est non nulle et donc $A > 0$. On sait que ce maximum (sur $[\,0\,;T\,]$) est atteint ; notons t_0 un point vérifiant $|u(t_0)| = A > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u(t_0 + nT) = \rho^n\, u(t_0) \qquad \big|u(t_0+nT) = \big|u(t_0)\big| = A.$$

Notamment, u ne tend pas vers 0 en l'infini, et donc u n'est pas fortement stable. Pour la même raison, v n'est pas fortement stable.

♦ **7.c** On suppose $|\Delta| > 1$. Le discriminant réduit du polynôme P est donc strictement positif et P possède deux racines réelles distinctes ρ et ρ', de produit $\rho\rho' = 1$. L'une de ces racines est donc de module strictement inférieur à 1, et l'autre de module strictement supérieur à 1. On supposera par exemple $|\rho| < 1 \qquad \text{et} \qquad |\rho'| > 1$.

Notons u une fonction propre pour la valeur propre ρ. Notons encore $A = \sup\limits_{t\in[\,0\,;T\,]} \big|u(t)\big|$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = E(t/T)$, de sorte que $t - nT \in [\,0\,;T\,]$. On peut alors écrire

$$u(t) = \tau^n(u)(t-nT) = \rho^n\, u(t-nT)$$

et, en passant au module :

$$|u(t)| = |\rho|^n\; |u(t-nT)| \leq |\rho|^n\; A.$$

On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

Notons v une fonction propre pour la valeur propre ρ'. Posons $N = \sup\limits_{t\in[\,0\,;T\,]} \big|v(t)\big|$.

Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point ; on peut donc choisir $t_1 \in [\,0\,;T\,]$ tel que $|v(t_1)| = N > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v(t_1 + nT) = \rho'^n\, v(t_1)$ donc

$$\big|v(t_1+nT)\big| = |\rho'|^n\; N.$$

Notamment, v n'est pas bornée, donc n'est pas stable (et encore moins fortement stable).

Par ailleurs, la famille (u, v) forme une base de $\mathcal{E}$. Toute solution de l'équation **(1)** s'écrit sous la forme $\alpha u + \beta v$; si $\beta \neq 0$, cette solution ne saurait être bornée et encore moins tendre vers 0 ; si au contraire $\beta = 0$, la solution est bien sûr fortement stable.

$$\boxed{\text{Une solution est fortement stable si et seulement si elle est multiple de } u.}$$

Toute solution stable est également multiple de u, et tous les multiples de u sont fortement stables, donc :

$$\boxed{\text{toute solution stable est également fortement stable.}}$$

♦ **8.a** Le discriminant réduit du polynôme P est nul, donc P admet une racine double $\rho = \Delta = \varepsilon$. Choisissons un vecteur propre u associé à ρ. Complétons maintenant la famille libre (u) en une base (u, v) de $\mathcal{E}$. La matrice représentative de l'endomorphisme τ dans la base (u, v) a pour expression générale

$$B = \operatorname*{mat}_{(u,v)}(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Cette matrice étant triangulaire supérieure, elle admet ε et b comme valeurs propres. Puisque $\mathrm{sp}(B) = \mathrm{sp}(\tau) = \{\varepsilon\}$, on en déduit que $b = \varepsilon$.

♦ **8.b** On suppose $a \neq 0$. L'endomorphisme τ n'est alors pas diagonalisable. On garde les notations de la question précédente : u est donc une fonction propre pour l'opérateur τ. Notamment, $\tau^2(u) = u$, ce qui prouve que la fonction u est $2T$-périodique (et même T-périodique si $\varepsilon = +1$). Ainsi, u est une fonction bornée, donc stable. Étant périodique mais non nulle, elle ne saurait admettre de limite nulle en $+\infty$.

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est stable mais non fortement stable.}}$$

Avant de traiter le cas général, montrons que v n'est ni fortement stable, ni stable.

– On suppose pour commencer v fortement stable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$v(t+T) = \tau(v)(t) = a\,u(t) + \varepsilon\,v(t) \tag{1}$$

donc $a\,u(t) = v(t+T) - \varepsilon\,v(t)$
En prenant dans cette équation la limite $t \to \infty$, et puisque $a \neq 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$: contradiction.
Conclusion : v n'est pas fortement stable.

– Utilisons deux fois de suite la formule (1) : on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(t+2T) &= a\,u(t+T) + \varepsilon\,v(t+T) = a\,u(t+T) + \varepsilon a\,u(t) + \varepsilon^2\,v(t) \\ &= 2a\varepsilon\,u(t) + v(t). \end{aligned}$$

donc $v(t+2T) - v(t) = 2a\,\varepsilon\,u(t)$
Choisissons un réel t_0 tel que $u(t_0) \neq 0$: on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad v(t_0 + 2NT) = v(t_0) + 2N\,\underbrace{a\,u(t_0)}_{\neq 0}$$

ce qui montre que la fonction v n'est pas bornée : v n'est pas stable.

Soit maintenant f une solution non nulle de **(1)**. Il existe des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f = \alpha u + \beta v$. Si $\beta = 0$ (et donc $\alpha \neq 0$), la solution f n'est pas fortement stable. Supposons donc $\beta \neq 0$. La fonction αu étant bornée et la fonction βv ne l'étant pas, f n'est pas bornée, donc ni fortement stable, ni même stable.

$$\boxed{\text{L'unique solution fortement stable est la solution nulle.}}$$

Seconde partie

Puisque λ et q sont réelles, on cherche désormais des solutions réelles à l'équation différentielle **(1)**.

♦ **9.a** L'équation **(1)** s'écrit

$$x'' + \lambda x = 0 \tag{2}$$

Distinguons trois cas selon le signe de λ.

Cas $\lambda > 0$ Les solutions de l'équation (2) sont de la forme $x(t) = \alpha\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right) + \beta\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)$ donc

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

Ainsi, $x_1(\pi) = x_2'(\pi) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right)$ et donc

$$\forall \lambda > 0 \qquad \Delta_0(\lambda) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) \tag{3}$$

Cas $\lambda = 0$ On a $x_1(t) = 1$ et $x_2(t) = t$ donc $\Delta_0(0) = 1$.

Cas $\lambda < 0$ Les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$x(t) = \alpha\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\,t\right) + \beta\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\,t\right),$$

d'où

$$x_1(t) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\,t\right) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\,t\right)$$

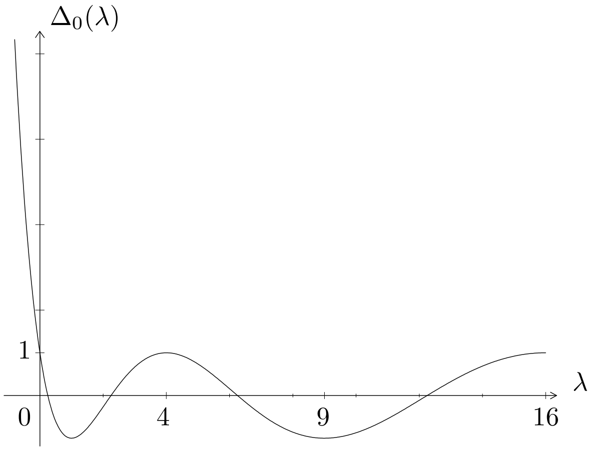
On en déduit $x_1(\pi) = x_2'(\pi) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\,\pi\right)$ et

$$\forall \lambda < 0 \qquad \Delta_0(\lambda) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\,\pi\right).$$

Δ_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car développable en série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}\,\lambda^n}{(2n)\,!}.$$

♦ **9.b**



♦ **9.c** On suppose que $\lambda = n^2$ où n est un entier naturel. En utilisant les formules (3), on obtient successivement

$$x_1(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n \qquad x_2(\pi) = -n\sin n\pi = 0$$

$$x_2(\pi) = \frac{1}{n}\sin n\pi = 0 \qquad x_2'(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

et donc, en utilisant la question 5.a :

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n\, I_2$$

♦ **10** L'équation **(1)** s'écrit maintenant

$$x'' + (\omega^2 - q)\, x = 0$$

Une simple récurrence permet de montrer la propriété demandée.

♦ **11** Choisissons un réel A positif. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{t\in[\,-A\,;A\,]} \big|u_n(t,\omega)\big| \le \frac{Q^n\, A^n}{\omega^n\, n!} \qquad \text{et} \qquad \sup_{t\in[\,-A\,;A\,]} \big|v_n(t,\omega)\big| \le \frac{Q^n\, A^n}{\omega^{n+1}\, n!}$$

Or la série $\sum \dfrac{Q^n\, A^n}{\omega^n\, n!}$ est convergente (de somme $\exp(QA/\omega)$, ce qui prouve que les séries de fonctions $\sum u_n(\cdot,\omega)$ et $\sum v_n(\cdot,\omega)$ convergent normalement, et donc uniformément, sur $[\,-A\,;A\,]$. On en déduit que $t \mapsto x_1(t,\omega)$ et $t \mapsto x_2(t,\omega)$ sont continues sur $[\,-A\,;A\,]$. Ceci étant vrai pour toute valeur du réel A, on en déduit que les fonctions $x_1(\cdot,\omega)$ et $x_2(\cdot,\omega)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

♦ **12.a** En dérivant sous la signe somme et dans la borne,

$$u_n'(t,\omega) = \int 0t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\right) q(s)\, u_{n-1}(s,\omega)\,\mathrm{d}s$$

c'est-à-dire

$$u_n'(t,\omega) = \int_0^t \cos\big(\omega(t-s)\big)\, q(s)\, u_{n-1}(s,\omega)\,\mathrm{d}s.$$

De même

$$v_n'(t,\omega) = \int_0^t \cos\big(\omega(t-s)\big)\, q(s)\, v_{n-1}(s,\omega)\,\mathrm{d}s.$$

♦ **12.b** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Soit $t \in \mathbb{R}$. Effectuons une majoration triangulaire de l'intégrale définissant u_n', en utilisant les majorations obtenues dans la question 10 :

$$\big|u_n'(t,\omega)\big| \le \int_{[\,0\,;t\,]} Q\,\big|u_{n-1}(s,\omega)\big|\,\mathrm{d}s \le \frac{Q^n}{\omega^{n-1}}\frac{1}{(n-1)\,!}\left[\frac{s^n}{n}\right]_0^t = \frac{Q^n\,|t|^n}{\omega^{n-1}\, n!}$$

De même

$$\big|v_n'(t,\omega)\big| \le \frac{Q^n\,|t|^n}{\omega^n\, n!}$$

♦ **12.c** Fixons-nous un réel A positif. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{t\in[-A\,;A]} \left|u_n'(t,\omega)\right| \leq \frac{Q^n\,A^n}{\omega^{n-1}\,n!} \qquad \text{et} \qquad \sup_{t\in[-A\,;A]} \left|v_n'(t,\omega)\right| \leq \frac{Q^n\,A^n}{\omega^n\,n!},$$

donc les séries de fonctions $\sum u_n'(\cdot,\omega)$ et $\sum v_n'(\cdot,\omega)$ convergent normalement, et donc uniformément, sur $[-A\,;A]$. Puisque les séries $\sum u_n(\cdot,\omega)$ et $\sum v_n(\cdot,\omega)$ convergent simplement en 0 (par exemple), on en déduit que les fonctions $t \mapsto x_1(t,\omega)$ et $t \mapsto x_2(t,\omega)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-A\,;A]$ (et leur dérivée peut être calculée en dérivant terme à terme les séries qui les définissent). Ceci étant vrai pour toute valeur du réel A, on en déduit que

$$\boxed{\text{Les fonctions } x_1(\cdot,\omega) \text{ et } x_2(\cdot,\omega) \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

♦ **13** Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons l'intégrale du membre de droite de la formule de l'énoncé :

$$\int_0^t \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,u_n(s,\omega)\,\mathrm{d}s.$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale, grâce à la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $s \longmapsto \dfrac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,u_n(s,\omega)$ (puisque $s \longmapsto \dfrac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)$ est continue donc bornée sur $[0\,;t]$) :

$$\int_0^t \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,u_n(s,\omega)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(t,\omega) = x_1(t,\omega) - u_0(t,\omega)$$

On fait de même pour x_2 et on obtient :

$$x_1(t,\omega) = \cos\omega t + \int_0^t \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

$$x_2(t,\omega) = \frac{\sin\omega t}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin\big(\omega(t-s)\big)}{\omega}\,q(s)\,x_2(s,\omega)\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

Il n'est malheureusement pas possible d'itérer la méthode exposée dans les questions 10 et 12.b pour montrer que les séries de terme général $u_n''(\cdot,\omega)$ et $v_n''(\cdot,\omega)$ convergent; en effet, la formule établie dans le théorème 2 fait cette fois-ci apparaître un terme de bord. Sans connaissance supplémentaire sur la fonction q (et notamment sur sa régularité), il n'est pas possible de conclure.

♦ **14.a** Dérivons deux fois les expressions (5)

$$x_1'(t,\omega) = -\omega\sin\omega t + \int_0^t \cos\big(\omega(t-s)\big)\,q(s)\,x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s + 0$$

$$x_2'(t,\omega) = \cos\omega t + \int_0^t \cos\big(\omega(t-s)\big)\,q(s)\,x_2(s,\omega)\,\mathrm{d}s + 0,$$

$$x_1''(t,\omega) = -\omega^2\cos\omega t - \omega\int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big)\,q(s)\,x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \cos(0)\,q(t)\,x_1(t,\omega) = -\omega^2\,x_1(t,\omega) + q(t)\,x_1(t,\omega)$$

et

$$x_2''(t,\omega) = -\omega\sin\omega t - \omega\int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big)\,q(s)\,x_2(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \cos(0)\,q(t)\,x_2(t,\omega) = -\omega^2\,x_2(t,\omega) + q(t)\,x_2(t,\omega)$$

ce qui prouve que $x_1(\cdot,\omega)$ et $x_2(\cdot,\omega)$ sont solutions de **(1)** pour $\lambda = \omega^2$.

♦ **14.b** On vérifie immédiatement que

$$\begin{cases} x_1(0,\omega) = 1 \\ x_1'(0,\omega) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_2(0,\omega) = 0 \\ x_2'(0,\omega) = 1 \end{cases}$$

Le résultat de la question 5.c montre alors que

$$\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}\big[x_1(\pi,\omega) + x_2'(\pi,\omega)\big].$$

♦ **15** On a

$$\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\pi,\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n'(\pi,\omega)\right) - \cos\omega\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\pi,\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(\pi,\omega)\right) \tag{6}$$

donc, en remarquant que ces séries convergent normalement et donc absolument, et en utilisant une inégalité triangulaire conjointement avec les inégalités des questions 10 et 12.b :

$$\begin{aligned}\left|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right| &\leq \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\omega^n\, n!} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\omega^n\, n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\omega^n\, n!} - 1 = \exp\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right) - 1\end{aligned}$$

ce qui montre, comme $\omega = \sqrt{\lambda}$, que

$$\left|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right| \leq \exp\left(\frac{\pi Q}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1.$$

♦ **16.a** On a, par définition de u_1 :

$$u_1(\pi,\omega) = \int_0^\pi \frac{\sin\big(\omega(\pi - s)\big)}{\omega}\, q(s)\, \cos\omega s \,\mathrm{d}s$$

et par dérivation de v_1 (le terme de bord étant nul comme nous l'avons vu à la question 12.b) :

$$v_1'(\pi,\omega) = \int_0^\pi \cos\big(\omega(\pi - s)\big)\, q(s)\, \frac{\sin(\omega s)}{\omega}\,\mathrm{d}s$$

donc

$$\begin{aligned}u_1(\pi,\omega) + v_1'(\pi,\omega) &= \frac{1}{\omega}\int_0^\pi q(s)\Big[\underbrace{\sin\big(\omega(\pi-s)\big)\cos(\omega s) + \cos\big(\omega(\pi-s)\big)\sin(\omega s)}_{\sin\left[\omega(\pi-s)+\omega s\right]}\Big] \\ &= \frac{\sin\omega\pi}{\omega}\int_0^\pi q(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

donc

$$u_1(\pi,\omega) + v_1'(\pi,\omega) = 0.$$

♦ **16.b** Reprenons l'équation 6 : compte tenu de la relation précédente, on obtient

$$\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} u_n(\pi,\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} v_n'(\pi,\omega)\right)$$

et donc, par inégalité triangulaire :

$$\left|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\sqrt{\lambda}^n\, n!} \leq \exp\left(\frac{Q\,\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 - \frac{Q\,\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Or on sait que $\exp(x) - 1 - x = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de 0 ; on en déduit que

$$\Delta_q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \mathrm{O}\,\frac{1}{\lambda}.$$

♦ **17** Soit $\alpha > 0$. On peut supposer, sans restreindre le problème, que $0 < \alpha < 1/2$. Posons $\varepsilon = 1 - \cos\pi\alpha$; alors $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$. On a de plus $\cos\big([\,-\pi\alpha\,;\pi\alpha\,]\big) \subset [\,1-\varepsilon\,;1\,]$

Par périodicité de la fonction cos, on peut montrer le résultat intermédiaire suivant :

Lemme : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I \qquad \cos x > 1 - \varepsilon$$

Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pair tel que $I \subset [\,\pi(n-\alpha)\,;\pi(n+\alpha)\,]$.

De même, si I vérifie

$$\forall x \in I \qquad \cos x < -1+\varepsilon$$

alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $I \subset [\,\pi(n-\alpha)\,;\pi(n+\alpha)\,]$.

On sait, d'après la question 15, que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right| = 0.$$

On en déduit qu'il existe un réel $\lambda_0 \geq 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on a

$$\left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right| < \varepsilon.$$

Soit J un intervalle d'instabilité inclus dans $[\,\lambda_0\,;+\infty\,[$. Alors, pour tout $\lambda \in J$, on a $|\Delta_q(\lambda)| > 1$ et donc, puisque Δ_0 est continue :

$$\forall \lambda \in J \qquad \Delta_0(\lambda) > 1-\varepsilon$$

ou

$$\forall \lambda \in J \qquad \Delta_0(\lambda) < -1+\varepsilon$$

(ces deux possibilités s'excluant mutuellement puisque $\varepsilon \in [\,0\,;1\,]$.) Le résultat intermédiaire montré ci-dessus permet de conclure qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \lambda \in J \qquad \pi\sqrt{\lambda} \in [\,\pi(n-\alpha)\,;\pi(n+\alpha)\,]$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in J \qquad \lambda \in \left[\,(n-\alpha)^2\,;(n+\alpha)^2\,\right].$$

Les intervalles d'instabilité sont donc toujours "centrés" sur les carrés des entiers ; ils sont donc de plus en plus éloignés. (Notre étude ne permet pas de conclure quant à leur largeur en revanche. Se reporter par exemple au bouquin d'Arnold sur les EDO, Éditions Mir, Moscou, pour une étude plus détaillée.)