X-ESPCI 2002- filière PC- deuxième composition.

Première partie

Notations: $\mathcal{C} = (e_i)_{1 \le i \le n}$désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $diag(A) = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ la diagonale de A.

1.

a) Raisonnement par l'absurde: on suppose que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A.
En particulier: $\forall i \in [1..n] \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \quad Ae_i = \lambda_i e_i$. En écrivant que $X = e_i + e_j$ est aussi vecteur propre, on obtient: $AX = \mu X$ soit $\mu(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Pour tous les i, j tels que $i \neq j$, on déduit $\mu = \lambda_i = \lambda_j$ car (e_i, e_j) est libre. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ qui prouve que A est scalaire.

b) Si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$ alors la matrice B est $B = Mat_{\mathcal{C}'}(u)$ où $\mathcal{C}' = (e'_k)_k$ se déduit de $\mathcal{C}$ par l'échange de e_i et e_j c'est-à-dire

$$e'_i = e_j \quad ; e'_j = e_i \quad ; e'_k = e_k \quad \text{si} \quad k \notin \{i, j\}.$$

Deuxième partie

2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = 0$.

a) Si $A \neq 0$, A ne peut être scalaire (car $tr(\lambda I) = n\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$). D'après **1.a),** il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que X_1 et $X_2 = AX_1$ sont linéairement indépendants. On complète ensuite la famille libre (X_1, X_2) en une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On considère: $\mathcal{P}(n)$: "toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = 0$ est semblable à une matrice de diagonale nulle". $\mathcal{P}(1)$ étant évidente, on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie pour un entier $n \ge 2$ et on démontre $\mathcal{P}(n)$.
Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On suppose $A \neq 0$ (pour $A = 0$, le résultat est immédiat) et on considère $\mathcal{X} = (X_1, X_2 ..., X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ tel que $AX_1 = X_2$. Alors

$$A' = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}$$

où $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Les matrices semblables A et A' ont même trace, à savoir: $0 = tr(A) = tr(A') = tr(A_1)$.
On applique ensuite $\mathcal{P}(n-1)$ à la matrice A_1 : il existe $P \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_1P = B_1$ où $diag(B_1) = (0, 0, ..., 0)_{n-1}$.
La matrice à blocs diagonaux $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$est inversible et $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$.
Par produit des blocs, on vérifie que $Q^{-1}A'Q = B$ s'écrit $B = \begin{bmatrix} 0 & L_2 \\ C_2 & B_1 \end{bmatrix}$ où $L_2 = L_1P$ et $C_2 = P^{-1}C_1$.
La matrice B étant à diagonale nulle, $\mathcal{P}(n)$ est démontrée.

3.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de trace nulle. $\begin{cases} u(e_1) = e_1 \\ u(e_2) = -e_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \end{cases}$ vérifient

$$B = Mat_{(e'_1, e'_2)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De même, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ conduit à $B = Mat_{(e'_1, e'_2, e'_3)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$

4. Soit A non scalaire et $\boxed{t = tr\,(A)}$.

La matrice $A_0 = A - tI$ n'est pas scalaire et, comme en **2.a),** il existe une base $\mathcal{X} = (X_1, X_2 ..., X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A_0 X_1 = X_2$ ce qui prouve que A_0 est semblable à $A_0' = Mat_{\mathcal{X}}\,(u - tId) = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}$ où

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n-1,1}\,(\mathbb{R}),\ L_1 \in M_{1,n-1}\,(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in M_{n-1}\,(\mathbb{R})\ .$$

En conséquence, A est semblable à $A_0' + tI = \begin{bmatrix} t & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix}$ où $B_1 = A_1 + tI_{n-1}$ et $t = tr\,(A) = tr\,(A_0' + tI) = t + tr\,(B_1)$ livre $\boxed{tr\,(B_1) = 0}$. On applique ensuite la question **2** à la matrice B_1 de trace nulle: ainsi, B_1 est semblable à une matrice $B_2 \in M_{n-1}\,(\mathbb{R})$ telle que $diag\,(B_2) = (0, 0, ..., 0)_{n-1}$. Il en résulte que A est semblable à une matrice de la forme $B = \begin{bmatrix} t & L_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}$ dont la diagonale est $(t, 0, ..., 0)_n$ où $\boxed{t = tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$.

5. Soit $A \in M_n\,(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

- $\underline{1^{er} cas : t = tr\,(A) \neq 0}$. La matrice $A' = A - \dfrac{t}{n} I$ étant de trace nulle, on la sait (d'après **2.**) semblable à une matrice $B' \in M_n\,(\mathbb{R})$ telle que $diag\,(B') = (0, 0, ..., 0)$ et, par suite, A est semblable à $B = B' + \dfrac{t}{n} I$ dont la diagonale est $\left(\dfrac{t}{n}, \dfrac{t}{n}, ..., \dfrac{t}{n}\right)$.
- $\underline{2^{ème} cas : t = tr\,(A) = 0}$.
  Dans ce cas, on démontre que A est semblable à une matrice $B \in M_n\,(\mathbb{R})$ de la forme:

  $$B = \begin{bmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \neq 0,\ L_1 \in M_{1,n-1}\,(\mathbb{R})\,,\ C_1 \in M_{n-1,1}\,(\mathbb{R}) \text{ et } \quad B_1 \in M_{n-1}\,(\mathbb{R})\,.$$

  Pour cela, on considère un vecteur $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX_1 \neq 0$ (X_1 existe car $A \neq 0$).

* soit (X_1, AX_1) est liée : on peut écrire $AX_1 = \alpha X_1$ où $\alpha \neq 0$ puisque ces deux vecteurs sont non nuls.
On complète alors en $\mathcal{X} = (X_1, X_2, ... X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ et $B = Mat_{\mathcal{X}}\,(u)$ est de la forme désirée avec $C_1 = 0_{1,n-1}$.
* soit (X_1, AX_1) est libre : en considérant $X_2 = X_1 - AX_1$, on obtient une famille libre (X_1, X_2) que l'on complète en $\mathcal{X} = (X_1, X_2, ... X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. Comme $AX_1 = X_1 - X_2$, la matrice $B = Mat_{\mathcal{X}}\,(u)$ est de la forme voulue avec $\alpha = 1$ et $C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on remarque que $0 = tr\,(A) = tr\,(B) = \alpha + tr\,(B_1)$ donc $\boxed{tr\,(B_1) = -\alpha \neq 0}$ et on applique la méthode du $1^{er} cas$ à la matrice B_1 : ainsi, B_1 est semblable à une matrice B_1' dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par la méthode employée au **2.b),** on déduit que B (donc A) est semblable à une matrice B' de la forme requise:

$$B' = \begin{bmatrix} \alpha & L_1' \\ C_1' & B_1' \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \neq 0,\ L_1' \in M_{1,n-1}\,(\mathbb{R})\,,\ C_1' \in M_{n-1,1}\,(\mathbb{R}) \text{ et } \quad B_1' \text{ d'éléments diagonaux non nuls.}$$

Troisième partie

6. $n=2$. Soit $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ de trace $t=a+d$. On désigne par $\mathcal{C}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (orthonormée) et on cherche une base orthonormée $\mathcal{C}'=(e_1',e_2')$ telle que $\boxed{u(e_1')\cdot e_1'=0}$. Il suffit d'effectuer une rotation d'axes $\begin{cases} e_1'=\cos(\theta)\,e_1+\sin(\theta)\,e_2 \\ e_2'=-\sin(\theta)\,e_1+\cos(\theta)\,e_2 \end{cases}$ et de choisir θ réel tel que $u(e_1').e_1'=0$.

Pour cela, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction **continue**

$$h:\theta\longrightarrow u(X_\theta)\cdot X_\theta \text{ où } X_\theta=\cos(\theta)\,e_1+\sin(\theta)\,e_2$$

Comme $h(0)=u(e_1)\cdot e_1=a$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=u(e_2)\cdot e_2=d$, il existe $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(\theta_0)=\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{t}{2}$.

La base $\mathcal{C}'=(e_1',e_2')$ correspondante vérifie:

$B'=Mat_{\mathcal{C}'}(u)=\begin{bmatrix} t/2 & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ avec $t=tr(B')=tr(A)=\dfrac{t}{2}+d'$ donc $d'=\dfrac{t}{2}$ qui livre le résultat.

7.

a) $f(A)$ est la borne sup d'un ensemble fini donc un maximum: il existe deux entiers i,j nécessairement distincts tels que $f(A)=|a_{ii}-a_{jj}|>0$. En échangeant e_i et e_1, e_j et e_2 , on obtient une base orthonormée $\mathcal{C}'=(e_k')_k$ telle que $A'=Mat_{\mathcal{C}'}(u)$ vérifie $f(A')=f(A)=|a_{11}'-a_{22}'|$.
Comme A' est orthosemblable à A, on peut démontrer la propriété cherchée sur A' au lieu de A, ce qui revient à supposer que $f(A)=|a_{11}-a_{22}|>0$.
REM: en choisissant i et j tels que $a_{ii}=\max\{a_{kk},k=1..n\}$ et $a_{jj}=\min\{a_{kk},k=1..n\}$, on peut se ramener au cas où $a_{22}=\max\{a_{kk},k=1..n\}$ et $a_{11}=\min\{a_{kk},k=1..n\}$ et on a, dans ces conditions,

$$f(A)=a_{22}-a_{11} \quad \text{et} \quad \forall k\in\{1..n\} \quad a_{kk}\in[a_{11},a_{22}]$$

b) La question **6.** montre que la matrice extraite $A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est orthosemblable à une matrice $B_1=\begin{bmatrix} \lambda & b_{12} \\ b_{21} & \lambda \end{bmatrix}$ où $\boxed{\lambda=\dfrac{tr(A_1)}{2}=\dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}}$. Ceci assure l'existence d'une base orthonormée $c'=(e_1',e_2')$ du plan $P=Vect(e_1,e_2)$ telle que $Mat_{c'}(u_1)=B_1$ où $u_1=p_1\circ u\in\mathcal{L}(P)$ (p_1 désignant la projection orthogonale sur la plan P).
On considère $\mathcal{C}'=(e_i')_{1\le i\le n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ définie par e_1',e_2' et $e_i'=e_i$ si $i\geq 3$. On a

$$A'=Mat_{\mathcal{C}'}(u)=\begin{bmatrix} B_1 & L_1 \\ C_1 & A_2 \end{bmatrix} \text{ où } L_1\in M_{2,n-2}(\mathbb{R}),\ C_1\in M_{n-2,2}(\mathbb{R}) \text{ et } \quad A_2\in M_{n-2}(\mathbb{R}).$$

On constate que les éléments diagonaux de A_2 sont les $a_{ii}=u(e_i')\cdot e_i'=u(e_i)\cdot e_i=a_{ii}$ où $i=3..n$. Donc A' est orthosemblable à A et vérifie $\boxed{a_{11}'=a_{22}'=\dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} \text{ et } a_{ii}'=a_{ii} \text{ si } i\geq 3.}$

Par ailleurs, avec $a_{22}=\max\{a_{kk},k=1..n\}$ et $a_{11}=\min\{a_{kk},k=1..n\}$ (cf REM du **7.a**) on a pour tout $i\geq 3$, $\quad a_{ii}\in[a_{11},a_{22}]$ et par conséquent $\boxed{\forall i\geq 3 \quad \left|a_{ii}-\dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}\right|\leq\dfrac{f(A)}{2}<f(A).}$

c) La matrice A' de la question **7.b)** est telle que: $f(A')=\max\limits_{1\le i<j\le n}\left|a_{ii}'-a_{jj}'\right|=\max\limits_{3\le i<j\le n}|a_{ii}-a_{jj}|\leq f(A)$.

- Si $f(A')<f(A)$ alors la matrice $A''=A'$ convient.
- Si $f(A')=f(A)>0$ (donc $n\geq 4$) on réitère la construction de la question **7b)** sur la matrice $A_2\in M_{n-2}(\mathbb{R})$ extraite de A (cf notations de **7b)**). On construit une matrice A_2' orthosemblable à A_2 puis une matrice $A''=\begin{bmatrix} B_1 & L_1' \\ C_1' & A_2' \end{bmatrix}$ orthosemblable à A telle que $f(A'')=\max\limits_{5\le i<j\le n}|a_{ii}-a_{jj}|\leq f(A)$.
($f(A'')=0$ si $n=4$)
L'algorithme s'arrêtant au bout d'un nombre fini p d'étapes (au plus $E(n/2)$) on est sûr de trouver une matrice $A^{(p)}$ orthosemblable à A telle que $f\left(A^{(p)}\right)<f(A)$.

8.

a) Considérons l'application $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ Q & \longrightarrow & {}^tQAQ \end{array} \right.$ continue (par continuité d'une application bilinéaire en dimension finie) et $E_A = \left\{Q^{-1}AQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\right\} = \left\{{}^tQAQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\right\} = \varphi_A(O_n(\mathbb{R}))$.

Or l'ensemble $\underline{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$ en tant que fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie:

- **fermé** car $O_n(\mathbb{R}) = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tQQ = I\} = \varphi_I^{-1}(I)$ image réciproque par une application continue d'un fermé.

- **borné** car $\forall Q \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|Q\|_\infty = \max\limits_{i,j} |q_{ij}| \leq 1$ (les vecteurs colonnes sont de norme quadratique 1)

En conclusion, $\underline{E_A = \varphi_A(O_n(\mathbb{R})) \text{ est compact car image continue d'un compact.}}$

b) L'application f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ car composée, différence d'applications continues:

- les projections $p_i : M \longrightarrow m_{ii}$ sont continues (linéaires en dimension finie),

- la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$,

- l'application max : $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \longrightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ ce qui s'explique par récurrence sur p en remarquant que

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) = \tfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \left|\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right| \quad \text{et} \quad \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) = \max(\max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}), \alpha_p).$$

Il en résulte que f est bornée sur le compact E_A et atteint ses bornes.

REM: *écrire que l'application f_{E_A} atteint son minimum est un pléonasme!*

c) On désigne par A_0 l'une des matrices de E_A telle que $f(A_0) = \min\limits_{A' \in E_A} f(A')$. Si les coefficients diagonaux de A_0 ne sont pas tous égaux, on peut appliquer à A_0 l'algorithme de la question **7** et construire une matrice A_0'' orthosemblable à A_0 (donc orthosemblable à A) telle que $f(A_0'') < f(A_0) \leq f(A)$. C'est contradictoire avec la définition de A_0.

<u>Conclusion: $B = A_0$ est orthosemblable à A et à éléments diagonaux tous égaux.</u>

9. *Application numérique:* l'algorithme de la question **7.** conduit à:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour par exemple:} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1' = (e_1 + e_2)/\sqrt{2} \\ e_2' = (e_1 - e_2)/\sqrt{2} \end{array} \right.$$

puis en opérant sur la matrice extraite: $A_1' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on obtient la matrice orthosemblable à A_1' :

$$A_1'' = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & ? & ? \\ ? & 1/4 & 1/4 \\ ? & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

On réitère le procédé sur A_2 qui vérifie $f(A_2) = \frac{1}{4} = |a_{11} - a_{22}|$ d'où $a_{11}' = a_{22}' = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{3}{8}$ et $a_{33}' = \frac{1}{4}$.

m	$diag(A_m)$	$f(A_m)$
0	$(1,0,0)$	1
1	$(1,1,0)/2$	1/2
2	$(2,1,1)/4$	1/4
3	$(3,3,2)/8$	1/8
4	$(6,5,5)/16$	1/16

Il semble que $\boxed{f(A_m) = \dfrac{1}{2^m}}$ et que, **pour m pair,** $diag(A_m) = \dfrac{1}{2^m}(\alpha_m, \beta_m, \beta_m)$

avec $\alpha_m = \beta_m + 1$ et, par conservation de la trace, $\alpha_m + 2\beta_m = 2^m$. On trouve ainsi que

$\boxed{\alpha_m = \dfrac{2^m + 2}{3} \text{ et } \beta_m = \dfrac{2^m - 1}{3}}$ soit $diag(A_m) = \dfrac{1}{3.2^m}(2^m + 2, 2^m - 1, 2^m - 1)$ qui conduit à

$diag\,(A_{m+1}) = \dfrac{1}{2^m}\left(\dfrac{\alpha_m+\beta_m}{2}, \dfrac{\alpha_m+\beta_m}{2}, \beta_m\right)$. D'où les formules suivantes que l'on vérifie par récurrence:

$$\boxed{diag\,(A_m) = \frac{1}{3.2^m}\left(2^m+2, 2^m-1, 2^m-1\right) \quad \text{si} \quad m\,\text{pair}}$$

$$\boxed{diag\,(A_m) = \frac{1}{3.2^m}\left(2^m+1, 2^m+1, 2^m-2\right) \quad \text{si} \quad m\,\text{impair}}$$

On constate bien que $\boxed{f\,(A_m) = \dfrac{1}{2^m} \text{ pour tout } m}$.

Quatrième partie

10. $R\,(A) = \{(AX|X) : X \in S\}$ où S désigne la sphère unité pour la norme $\|.\|$.

a) Soit λ une valeur propre réelle de A : il existe un vecteur propre X associé. Quitte à le normaliser, on peut supposer que $X \in S$ et alors, $(AX|X) = \lambda\,(X|X) = \lambda \in R\,(A)$.
Si $(e_i)_i$ désigne toujours la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$, on a $(Ae_i|e_i) = a_{ii} \in R\,(A)$.

b) - S étant compacte (fermée bornée en dimension finie), l'ensemble $R\,(A)$ est compact puisque image de S par l'application continue $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow (AX|X) \end{cases}$. Ainsi, $R\,(A)$ est fermé borné.

- On démontre que $R\,(A)$ est un intervalle en vérifiant sa convexité: on considère r_1 et r_2 deux éléments distincts de $R\,(A)$ qui s'écrivent $r_1 = (AX_1|X_1)$ et $r_2 = (AX_2|X_2)$ où X_1 et X_2 sont dans S; il s'agit de démontrer que le segment $[r_1, r_2]$ est inclus dans $R\,(A)$.

- 1^{er}*cas* : $0 \notin [X_1, X_2] = \{(1-t)\,X_1 + tX_2 / t \in [0,1]\}$.
  On remarque que $R\,(A) = \{\phi'\,(X) : X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ où ϕ' est l'application continue $\begin{cases} \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow \dfrac{(AX|X)}{\|X\|^2} \end{cases}$
  On considère $\psi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \phi'\,[(1-t)\,X_1 + tX_2] \end{cases}$ **continue** et on lui applique le théorème des valeurs intermédiaires:

$$\psi\,(0) = r_1 \quad \text{et} \quad \psi\,(1) = r_2, \quad \text{donc} \quad \forall r \in [r_1, r_2] \quad \exists\theta \in [0,1] \quad \psi\,(\theta) = r$$

  et, en conséquence $[r_1, r_2] \subset \psi\,([0,1]) = \phi'\,([X_1, X_2]) \subset R\,(A)$.
- $2^{\text{ème}}$*cas* : $0 \in [X_1, X_2]$.
  Les vecteurs X_1 et X_2 sont nécessairement liés donc $X_1 = X_2$ ou $X_1 = -X_2$ (puisque unitaires). Dans ce cas, on aurait $r_1 = r_2$ ce qui a été exclu.

REM: *cette question peut aussi se démontrer à l'aide des matrices symétriques.* On commence par démontrer que lorsque A est symétrique, $R\,(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont les valeurs propres extremales de A (se prouve en réduisant la forme quadratique associée à A). Pour A quelconque, on considère $A^+ = \dfrac{(A + {}^tA)}{2}$ la partie symétrique de A et on remarque que $R\,(A) = R\,(A^+)$ puisque $(A^+X|X) = \frac{1}{2}\left[{}^t(AX)\,X + {}^t({}^tAX)\,X\right] = (AX|X)$.

c) *Dans cette question, la symétrie de A ne sert pas.*
Le segment $R\,(A)$ contient (d'après **10.a)**) tous les a_{ii} où $1 \leq i \leq n$ donc contient leur moyenne $\dfrac{tr\,(A)}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Lorsque $tr\,(A) = 0$, on déduit que $0 \in R\,(A)$.

d) $t = tr\,(A) \in R\,(A)$ donc s'écrit $t = (AX_1|X_1)$ où $X_1 \in S$. On peut compléter par $X_2, X_3, ...X_n$ de telle façon que $\mathcal{X} = (X_i)_i$ soit un base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Si u désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A, on obtient:

$$A' = Mat_{\mathcal{X}}\,(u) = \begin{bmatrix} t & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix} \text{ où } C_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, A et A' sont orthosemblables et $tr(A') = tr(A) = t + tr(A_1)$ donc $tr(A_1) = 0$. La troisième partie a démontré que A_1 est orthosemblable à une matrice B_1 de diagonale nulle ce qui prouve l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{X}' = (X'_i)_i$ telle que $B = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} t & L'_1 \\ C'_1 & B_1 \end{bmatrix}$. Donc A est orthosemblable à cette matrice B de diagonale $(t, 0, 0, ..., 0)$.

Cinquième partie

12.

a) D'après **5.** A est semblable à une matrice $B = (b_{ij})_{ij}$ telle que $\forall i \in [1..n]\ b_{ii} \neq 0$.

On considère la matrice triangulaire supérieure $Y = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & -b_{ij} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit $\begin{cases} y_{ij} = -b_{ij} \text{ si } i < j \\ y_{ii} = 1 \\ y_{ij} = 0 \text{ si } i > j \end{cases}$.

La matrice $B + Y$ est triangulaire inférieure avec $diag(B+Y) = (1 + b_{11}, 1 + b_{22}, ..., 1 + b_{nn})$.
Les spectres (réels ou complexes) sont $Sp(Y) = \{1\}$ et $Sp(B+Y) = \{1 + b_{ii} : 1 \leq i \leq n\}$.
Ils sont disjoints car les b_{ii} sont non nuls.

b) Par définition de B, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Par suite, la matrice $X = P^{-1}YP$ vérifie $A + X = P^{-1}(B+Y)P$ donc $Sp(X) = Sp(Y)$ et $Sp(A+X) = Sp(B+Y)$.

13. $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ T(A) \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) **Pour λ réel,** on a:

$$\det\left(T(I)^{-1} T(A) - \lambda I\right) = \det\left(T(I)^{-1}[T(A) - \lambda T(I)]\right) = \det\left(T(I)^{-1}\right)\det(T(A) - \lambda T(I)) =$$
$$= \det(T(I))^{-1} \det(T(A - \lambda I)) \text{ car } T \text{ est linéaire.}$$

Il en résulte que si λ est dans le spectre réel de $T(I)^{-1}T(A)$ alors $\det\left(T(I)^{-1}T(A) - \lambda I\right) = 0$ donc $\det(T(A - \lambda I)) = 0$. Comme la matrice $A - \lambda I$ ne peut être inversible, on en déduit que λ est dans le spectre réel de A. Donc $\boxed{Sp_{\mathbb{R}}\left(T(I)^{-1}T(A)\right) \subset Sp_{\mathbb{R}}(A)}$

b) *Erreur d'énoncé...du moins pour n pair.*
Pour démontrer que T est inversible, il suffit de prouver que son noyau est réduit à $\{0\}$ puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace-vectoriel de dimension finie.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ **non nulle** telle que $T(A) = 0$. On peut lui appliquer les résultats de la question **12.** à savoir l'existence d'une matrice non nulle $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A+X) \cap Sp(X) = \emptyset$.
Précision: pour les matrices triangulaires Y et $B+Y$ (donc également pour X et $A+X$) le spectre réel et le spectre complexe sont confondus.
D'après **13.a)** $Sp_{\mathbb{R}}\left(T(I)^{-1}T(X)\right) \subset Sp_{\mathbb{R}}(X)$ et $Sp_{\mathbb{R}}\left(T(I)^{-1}T(A+X)\right) \subset Sp_{\mathbb{R}}(A+X)$.
Or $T(A+X) = T(A) + T(X) = T(X)$ ce qui conduit à

$$Sp_{\mathbb{R}}\left(T(I)^{-1}T(X)\right) \subset Sp_{\mathbb{R}}(A+X) \cap Sp_{\mathbb{R}}(X) = \emptyset$$

On arrive à une contradiction si on prouve que le **spectre réel** $T(I)^{-1}T(X)$ est non vide ce qui est vrai pour n impair.
Mais pour n pair, **l'application T n'est pas nécessairement inversible** comme le prouve le contre-exemple suivant (pour $n = 2$).

$$T : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$