X 2000 option PC : Math2

Première partie

1. a) *classique* : l'existence de la borne supérieure étant à justifier avec la continuité de $V \to XV$ sur la sphère unité.

   b) Pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, $\|XYV\| \leq N(X)\|YV\| \leq N(X)N(Y)\|V\|$. Par comparaison d'un majorant et de la borne supérieure, on déduit que N est une norme d'algèbre.

Si $n \geq 2$, considérons la matrice X dont tous les coefficients valent 1 ;
elle vérifie $N_\infty(X^2) = n > N_\infty(X)^2 = 1$.
Si $n = 1$, N_∞ coïncide avec N c'est-à-dire la fonction valeur absolue.
Ainsi, N_∞ est une norme d'algèbre uniquement lorsque $n = 1$.

2. a) Le déterminant s'exprimant à l'aide de sommes, différences de produits des coefficients de la matrice, l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la suite $(\det(X_p))_p$ tend vers $\det(X) \neq 0$; il existe donc un rang à partir duquel les det (X_p) sont non nuls.

   b) En remarquant que $X^{-1}(X - X_p)X_p^{-1} = X_p^{-1} - X^{-1}$ et en utilisant l'inégalité du 1.b) , on déduit :

$$\begin{aligned}\left\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\right\| = \left\|\left(X_p^{-1} - X^{-1}\right)V\right\| &\leq N\left(X^{-1}(X - X_p)\right)\left\|X_p^{-1}V\right\| \\ &\leq N\left(X^{-1}\right)N\left(X - X_p\right)\left\|X_p^{-1}V\right\|\end{aligned}$$

   Puisque la suite $(N(X - X_p))_p$ tend vers 0 , il existe un entier p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0 \quad N(X - X_p) \leq \frac{1}{2N\left(X^{-1}\right)}.$$

   L'inégalité de la question précédente fournit ensuite :

$$\forall p \geq p_0 \quad \left\|X_p^{-1}V\right\| \leq \left\|X^{-1}V\right\| + \left\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\right\| \leq \left\|X^{-1}V\right\| + \frac{1}{2}\left\|X_p^{-1}V\right\|$$

$$\text{puis,} \quad \forall p \geq p_0 \quad \left\|X_p^{-1}V\right\| \leq 2\left\|X^{-1}V\right\|.$$

   Remarque : l'énoncé aurait dû demander une constante C indépendante de V , ce qui est essentiel pour la suite.

   c) La constante $C = 2$ trouvée ci-dessus étant **indépendante de p et de V** , on a pour $p \geq p_0$

$$\forall V \in \mathbb{R}^n \quad \left\|\left(X_p^{-1} - X^{-1}\right)V\right\| \leq CN\left(X^{-1}\right)N\left(X - X_p\right)\left\|X^{-1}V\right\| \leq CN\left(X^{-1}\right)^2 N\left(X - X_p\right)\|V\|.$$

   On en déduit, que le réel $CN\left(X^{-1}\right)^2 N\left(X - X_p\right)$ majore l'ensemble des $\dfrac{\left\|\left(X_p^{-1} - X^{-1}\right)V\right\|}{\|V\|}$ où $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ce qui livre :

$$\forall p \geq p_0 \quad N\left(X_p^{-1} - X^{-1}\right) \leq CN\left(X^{-1}\right)^2 N\left(X - X_p\right) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   D'où le résultat demandé.

3. *Remarque préliminaire :* une matrice X possédant la propriété (P), vérifie les inégalités $(*)$ suivantes :

$$(*) \qquad \forall i \in [1..n] \quad |X_{ii}| = X_{ii} > -\sum_{j \neq i} X_{ij} = \sum_{j \neq i} |X_{ij}|$$

   a) On suppose qu'un vecteur $V \neq 0$ vérifie $XV = 0$. Alors $|v_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ est *strictement positif* et $\forall i \in [1..n] \quad \sum\limits_{j=1}^{n} X_{ij}v_j = 0$.

   En particulier, $X_{i_0i_0}v_{i_0} = -\sum\limits_{j \neq i_0} X_{i_0j}v_j$ implique $|X_{i_0i_0}||v_{i_0}| \leq \left(\sum\limits_{j \neq i_0} |X_{i_0j}|\right)|v_{i_0}|$ ce qui est en contradiction avec $(*)$. On vient ainsi de démontrer que X est de noyau nul donc inversible (X est une matrice carrée).

b) On suppose que $\forall i \in \{1..n\} \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} v_j \geq 0$ et que $v_{i_1} = \min_{1 \leq i \leq n} v_i < 0$.

$$\text{Alors } X_{i_1 i_1} v_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} X_{i_1 j} v_j + \sum_{j \neq i_1} \left(-X_{i_1 j}\right) v_j \geq \sum_{j \neq i_1} \left(-X_{i_1 j}\right) v_j \geq \left[\sum_{j \neq i_1} \left(-X_{i_1 j}\right)\right] v_{i_1}$$

car $-X_{i_1 j} \geq 0$ pour $j \neq i_1$.

On divise ensuite par $v_{i_1} < 0$ et on obtient $X_{i_1 i_1} \leq \sum_{j \neq i_1} \left(-X_{i_1 j}\right)$, qui est encore incompatible avec $(*)$.

4. Soit un entier p fixé. D'après 3.a), la matrice X_p est inversible.

Posons, pour $k \in \{1..n\}$, $V_k = X_p^{-1} e_k$,où $(e_1, e_2, ... e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$; V_k est la $k^{ième}$ colonne de X_p^{-1}. Le vecteur $X_p V_k = e_k$ étant à composantes positives ou nulles, la question 3.b) démontre que V_k est également à composantes positives ou nulles. En conséquence, tous les coefficients de la matrice X_p^{-1} sont positifs ou nuls. Par ailleurs, on sait par 2.c) que $X_p^{-1} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} X^{-1}$. Les coefficients d'une matrice étant ses coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\left(X^{-1}\right)_{ij} = \lim_{p \to +\infty} \left(X_p^{-1}\right)_{ij} \geq 0$ pour tous i, j.

Deuxième partie

5. a) *unicité de* u : si $u'' = v'' = -f$, alors $u - v$ est affine donc nulle (car $u - v$ s'annule en 0 et 1).

existence de u : si on note $F : x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0 , alors la fonction

$$u : x \longrightarrow -\int_0^x F(t)dt + x\left[\int_0^1 F(t)dt\right]$$

est C^4 sur $[0,1]$ et vérifie les conditions requises.
Remarque : une intégration par parties fournit une autre expression de u :

$$u(x) = -\int_0^x f(t)(x-t)\,dt + x\left[\int_0^1 f(t)(1-t)\,dt\right]$$

b) Si $f \geq 0$, $u'' \leq 0$ donc u est concave sur $[0,1]$. Son graphe est donc situé au dessus de la corde joignant les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$, c'est-à-dire au dessus de l'axe horizontal.

c) Pour $f = 1$, $\widehat{u}(x) = \dfrac{x(1-x)}{2}$.

6. a) $M_4 = \sup_{x \in [0,1]} \left|u^{(4)}(x)\right|$ existe par continuité de $u^{(4)}$ sur le compact $[0,1]$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à u C^4 sur $[0,1]$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1] \quad u(x) = u(x_i) + (x - x_i)\, u'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} u''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{6} u^{(3)}(x_i) + R_4(x)$$

avec $|R_4(x)| \leq \dfrac{|x - x_i|^4}{24} M_4$. On écrit cette inégalité pour $x = x_{i-1}$ (respectivement pour $x = x_{i+1}$) et en additionnant, on déduit :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + 2\frac{(h)^2}{2} u''(x_i) + R_4(x_{i+1}) + R_4(x_{i-1})$$

Le résultat demandé provient ensuite de $|R_4(x_{i+1})| + |R_4(x_{i-1})| \leq 2\dfrac{(h)^4}{24} M_4$.

b) Pour $f = 1$, $\widehat{u}^{(4)} = 0$ car $\widehat{u}$ est un polynôme de degré 2. L'inégalité précédente conduit, alors, à l'annulation de tous les $\widehat{u}''(x_i) - \dfrac{1}{h^2}\left(\widehat{u}(x_{i-1}) - 2\widehat{u}(x_i) + \widehat{u}(x_{i+1})\right)$ avec $\widehat{u}''(x_i) = -f(x_i) = -1$.

7. a) $A = \dfrac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 0 \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) La forme quadratique Q associée à la matrice A symétrique réelle s'écrit :

$$Q(V) = (AV|V) = \frac{2}{h^2}\left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1}\right] = \frac{1}{h^2}\left[v_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(v_i - v_{i+1})^2 + v_n^2\right]$$

ce qui prouve que Q est positive.

c) Q est définie car $Q(V) = 0$ implique l'annulation de tous les carrés réels ci-dessus donc de tous les v_i. Ainsi, la matrice A est définie positive donc inversible (son spectre est dans $\mathbb{R}_+^*$).

8. a) La matrice ne vérifie pas la propriété (P) car la somme des coefficients de la ligne i est nulle pour $2 \leq i \leq n-1$. En revanche, A est la limite d'une suite de matrices vérifiant (P), par exemple : $A_p = A + \dfrac{1}{ph^2}I_n$ où $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4., $B = A^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls.

b) On a vu au 6.b) que

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \frac{1}{h^2}\left(-\widehat{u}(x_{i-1}) + 2\widehat{u}(x_i) - \widehat{u}(x_{i+1})\right) = 1$$

c'est-à-dire que, si $\widehat{U}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\widehat{u}_i = \widehat{u}(x_i)$, on a $A\widehat{U} = \widehat{F}$ soit $\widehat{U} = B\widehat{F}$. Cette dernière égalité s'écrit :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \sum_{j=1}^{n} B_{ij} = \widehat{u}_i = \frac{x_i(1-x_i)}{2}$$

Une étude des variations de $x \to x(1-x)$ sur $[0,1]$ conduit ensuite au résultat attendu :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \widehat{u}_i \in \left[0, \frac{1}{8}\right]$$

9. a) En appliquant 6.a) à la fonction u,on obtient, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\left|f(x_i) + \frac{1}{h^2}\left(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right)\right| \leq \frac{h^2}{12}M \qquad \text{où } M = \sup_{[0,1]}|f''|$$

soit, puisque $u_0 = 0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1} = 0$ vérifient (2) avec $f_i = f(x_i)$,

$$(**) \qquad \left|\frac{1}{h^2}\left[-(u_{i-1} - u(x_{i-1})) + 2(u_i - u(x_i)) - (u_{i+1} - u(x_{i+1}))\right]\right| \leq \frac{h^2}{12}M$$

Posons, $(\Delta u)_i = u_i - u(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n+1$, (ce qui impose $(\Delta u)_0 = (\Delta u)_{n+1} = 0$) et désignons par Δu le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(\Delta u)_i$, $1 \leq i \leq n$. Le vecteur $V = A(\Delta u)$ a comme composantes les

$$v_i = \frac{1}{h^2}\left(-(\Delta u)_{i-1} + 2(\Delta u)_i - (\Delta u)_{i+1}\right)$$

et l'inégalité précédente $(**)$ dit que $|v_i| \leq \dfrac{h^2}{12}M$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$. Par ailleurs $\Delta u = BV$ conduit à

$$\forall i \in \{1..n\} \quad (\Delta u)_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} v_j.$$

Sachant que les coefficients B_{ij} sont positifs ou nuls et que $0 \leq \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \leq \frac{1}{8}$, on tire :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \left|(\Delta u)_i\right| \leq \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \left|v_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\right) \frac{h^2}{12} M \leq \frac{h^2}{96} M.$$

b) Avec les notations précédentes : $N_\infty (\Delta u) \leq \dfrac{M}{96\,(n+1)^2}$ qui signifie que $u_1, u_2, ..., u_n$ fournissent une approximation des $u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n)$ telle que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq \dfrac{M}{96\,(n+1)^2}$.

c) La fonction f est C^∞ sur $[0,1]$ et $f''(x) = \dfrac{150x^2\left(x^4-5\right)}{\left(x^4+5\right)^{5/2}}$. Pour $x \in [0,1]$, on a $-5 \leq x^4 - 5 \leq -4$ et $5 \leq x^4 + 5 \leq 6$, donc $|f''(x)| = -f''(x) \leq \dfrac{150 \times 5}{5^{5/2}} = 6\sqrt{5}$. D'après l'étude précédente, on choisit n tel que $\dfrac{6\sqrt{5}}{96\,(n+1)^2} \leq 10^{-4}$ c'est-à-dire $n+1 \geq \dfrac{\sqrt[4]{5}}{4} \times 100 = 37.3837...$ soit $n \geq 37$.

Troisième partie

10. a) L'équation homogène $(H) : u'' - \dfrac{1}{p^2} u = 0$ admet comme solutions les fonctions :

$$x \to \lambda\, e^{\frac{x}{p}} + \mu\, e^{-\frac{x}{p}} = \alpha ch(\frac{x}{p}) + \beta sh(\frac{x}{p})$$

On résout ensuite l'équation $(L) : u'' - \dfrac{1}{p^2} u = -f$ par la méthode de variations des deux constantes ; on sait qu'il existe α et β de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}$$

où $u_1 : x \to ch(\frac{x}{p})$ et $u_2 : x \to sh(\frac{x}{p})$. On obtient le système $\begin{cases} \alpha' u_1 + \beta' u_2 = 0 \\ \alpha' u_1' + \beta' u_2' = -f \end{cases}$ avec $u_1' = \dfrac{1}{p} u_2$ et $u_2' = \dfrac{1}{p} u_1$ dont les solutions sont : $\alpha' = p\ f\ u_2$ et $\beta' = -p\ f\ u_1$ soit

$$\alpha(x) = p \int_0^x f\ u_2 + C \quad \text{ et } \quad \beta(x) = -p \int_0^x f\ u_1 + D.$$

On ajoute les conditions $u(0) = \alpha(0) = 0$ et $u(1) = \alpha(1)\, ch(1/p) + \beta(1)\, sh(1/p) = 0$ c'est-à-dire

$$C = 0 \text{ et } Dsh(1/p) = -p \int_0^1 f\ \left(u_2 ch\,(1/p) - u_1 sh\,(1/p)\right) = -p \int_0^1 f\ (t)\, sh\left(\frac{t-1}{p}\right) dt$$

et on obtient l'expression (E_1) de l'unique solution du problème (3) :

$$\boxed{(E_1) \qquad u^{[p]}(x) = p \int_0^x f\ (t)\, sh\left(\frac{t-x}{p}\right) dt - p \frac{sh(x/p)}{sh(1/p)} \int_0^1 f\ (t)\, sh\left(\frac{t-1}{p}\right) dt}$$

Remarque 1 : $u^{[p]}$ est C^4 sur $[0,1]$ car de classe C^2 et $u^{[p]\prime\prime} = -f + \dfrac{1}{p^2} u^{[p]}$ est C^2.

Remarque 2 : Avec le système fondamental $u_1 : x \to sh(\frac{x}{p})$ et $u_2 : x \to sh(\frac{1-x}{p})$ on trouve une deuxième expression (E_2) de la solution $u^{[p]}$:

$$\boxed{(E_2) \qquad u^{[p]}(x) = \frac{p}{sh(1/p)} \left[sh(\frac{x}{p}) \int_x^1 f\ (t)\, sh\left(\frac{1-t}{p}\right) dt + sh(\frac{1-x}{p}) \int_0^x f\ (t)\, sh\left(\frac{t}{p}\right) dt \right]}$$

b) Soit $x \in [0,1]$ fixé. On remarque que $\forall u \leq 0 \quad sh(u) \leq u$ et, en conséquence,

$$\forall t \in [0,x] \quad psh\left(\frac{t-x}{p}\right) - (t-x) \leq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f\ (t)\, psh\left(\frac{t-x}{p}\right)dt - \int_0^x f\ (t)\,(t-x)\,dt\right| &= \left|\int_0^x f\ (t)\left[psh\left(\frac{t-x}{p}\right) - (t-x)\right]dt\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^x \left[(t-x) - \ psh\left(\frac{t-x}{p}\right)\right]dt.\end{aligned}$$

Or, $p^2\left(ch(\dfrac{x}{p}) - 1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ livre :

$$\int_0^x \left[(t-x) - \ psh\left(\frac{t-x}{p}\right)\right]dt = \left[\frac{(t-x)^2}{2} + p^2 ch\left(\frac{t-x}{p}\right)\right]_0^x = -\frac{x^2}{2} + p^2\left(1 - ch\left(\frac{x}{p}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et en conséquence $\displaystyle\int_0^x f\ (t)\, p\ sh\left(\frac{t-x}{p}\right)dt \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f\ (t)\ \ (t-x)\,dt.$

Cette dernière limite écrite en $x=1$, et $\dfrac{sh(x/p)}{sh(1/p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x$ conduisent finalement à :

$$u^{[p]}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f\ (t)\ \ (t-x)\,dt - x\int_0^1 f\ (t)\ \ (t-1)\,dt = u(x)$$

On reconnaît une des expressions vues au 5.a) pour la fonction u solution du problème (1).

N.B : il est possible de démontrer plus simplement ce résultat à l'aide de l'expression (E_2) en utilisant le théorème de convergence dominée ($0 \leq sh(t/p) \leq sh(1/p)$ pour tout $t \in [0,1]$) et $psh(x/p) \longrightarrow x$).

11. $\widehat{f} = 1$

a) On a déjà calculé, à la question précédente l'égalité

$$\int_0^x psh\left(\frac{t-x}{p}\right)dt = p^2\left(1 - ch\left(\frac{x}{p}\right)\right) = -2p^2 sh^2\left(\frac{x}{2p}\right)$$

qui livre : $\widehat{u}^{[p]}(x) = -2p^2 sh^2\left(\dfrac{x}{2p}\right) - \dfrac{sh(x/p)}{sh(1/p)}\left[-2p^2 sh^2\left(\dfrac{1}{2p}\right)\right]$. A l'aide de $sh(a) = 2sh(\dfrac{a}{2})ch(\dfrac{a}{2})$, on obtient la simplification :

$$\boxed{\widehat{u}^{[p]}(x) = \frac{2p^2 sh\left(\dfrac{x}{2p}\right) sh\left(\dfrac{1-x}{2p}\right)}{ch\left(\dfrac{1}{2p}\right)} = \frac{p^2}{ch\left(\dfrac{1}{2p}\right)}\left[ch\left(\frac{1}{2p}\right) - ch\left(\frac{2x-1}{2p}\right)\right]}$$

Remarque : on retrouve bien que $\widehat{u}^{[p]}(x) \underset{p\to+\infty}{\sim} 2p^2\left(\dfrac{x}{2p}\right)\left(\dfrac{1-x}{2p}\right) = \dfrac{x(1-x)}{2} = \widehat{u}(x)$.

b) $\widehat{u}^{[p]}(1-x) = \widehat{u}^{[p]}(x)$ donc il y a symétrie du graphe de $\widehat{u}^{[p]}$ par rapport à $x = 1/2$. De plus les variations de $x \to ch(\dfrac{2x-1}{2p})$ prouvent que $\widehat{u}^{[p]}$ croît sur $[0,1/2]$ de 0 à $\widehat{u}^{[p]}(1/2)$ puis décroît jusqu'à 0.

c) D'après la question précédente, il suffit de vérifier que $\widehat{u}^{[p]}(1/2) = p^2\left(1 - \dfrac{1}{ch(\dfrac{1}{2p})}\right) < 1/8$.

Pour cela, on étudie les variations sur $[0,1]$ de la fonction $\varphi : x \to \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)ch(x)$ de dérivées

$\varphi'(x) = -xch(x) + \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) sh(x)$ et $\varphi''(x) = -\dfrac{x^2}{2} ch(x) - 2xsh(x) < 0$ sur $]0,1[$. Ainsi φ' est strictement décroissante, nulle en $x = 0$ donc strictement négative sur $]0,1[$. Par conséquent, φ est strictement décroissante donc $\varphi\left(\dfrac{1}{2p}\right) < \varphi(0) = 1$ qui livre le résultat.

12. a) La matrice $A_p = \left(A + \dfrac{1}{p^2}\right) I_n$ est inversible car vérifie la propriété (P) de la première partie (cf 3.a)). Il est clair que la suite $(A_p)_p$ converge vers A et que, d'après 2.c), $\left(A_p^{-1}\right)_p$ converge vers A^{-1}. Ainsi, le problème (4) admet une solution unique $U^{[p]} = A_p^{-1}F$ qui, par continuité du produit matriciel, converge vers $U = A^{-1}F$, la solution du système linéaire (2) .

b) $U^{[p]} = B_p F$ où $B_p = A_p^{-1}$ étant à coefficients positifs d'après la question 4, on peut reprendre la méthode utilisée au 9.a).

La fonction $u^{[p]}$ est C^4 sur $[0,1]$ et vérifie l'inégalité de 6.a), pour $1 \leq i \leq n$:

$$\left| f(x_i) - \frac{u^{[p]}(x_i)}{p^2} + \frac{1}{h^2}\left(u^{[p]}(x_{i-1}) - 2u^{[p]}(x_i) + u^{[p]}(x_{i+1})\right)\right| \leq \frac{h^2}{12} M_p \qquad \text{où } M_p = \sup_{[0,1]} \left|u^{[p](4)}\right|$$

avec,cette fois, $-u^{[p]\prime\prime} = f - \dfrac{u^{[p]}}{p^2}$.

L'inégalité $(**)$ devient alors :

$$\left| \frac{u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)}{p^2} + \frac{1}{h^2}\left[-\left(u_{i-1}^{[p]} - u^{[p]}(x_{i-1})\right) + 2\left(u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)\right) - \left(u_{i+1}^{[p]} - u^{[p]}(x_{i+1})\right)\right]\right| \leq \frac{h^2}{12} M_p$$

Posons, de la même manière, $(\Delta u)_i^{[p]} = u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n+1$, (où $(\Delta u)_0^{[p]} = (\Delta u)_{n+1}^{[p]} = 0$) et désignons par $\Delta u^{[p]}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(\Delta u)_i^{[p]}$, $1 \leq i \leq n$.

Le vecteur $V^{[p]} = A_p\left(\Delta u^{[p]}\right)$ vérifie, $\left|v_i^{[p]}\right| \leq \dfrac{h^2}{12} M_p$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, grâce à l'inégalité $(**)$. Par ailleurs $\Delta u^{[p]} = B_p V^{[p]}$ conduit également à

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \left|\left(\Delta u^{[p]}\right)_i\right| \leq \sum_{j=1}^{n} (B_p)_{ij} \left|v_j^{[p]}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (B_p)_{ij}\right) \frac{h^2}{12} M_p.$$

– *majoration de* M_p :

L'équation différentielle vérifiée par $u^{[p]}$ fournit $-u^{[p](4)} = f'' - \dfrac{u^{[p]\prime\prime}}{p^2} = f'' + \dfrac{f}{p^2} - \dfrac{u^{[p]}}{p^4}$ et, en conséquence, $M_p \leq \|f''\|_\infty + \dfrac{\|f\|_\infty}{p^2} + \dfrac{\left\|u^{[p]}\right\|_\infty}{p^4}$.

Pour majorer la fonction $\left|u^{[p]}\right|$, on utilise la deuxième expression (E_2) de cette fonction trouvée en 10.a), car (E_2) ne fait intervenir que des noyaux positifs : $sh\left(\dfrac{x}{p}\right)$, $sh\left(\dfrac{t}{p}\right)$, $sh\left(\dfrac{1-x}{p}\right)$, $sh\left(\dfrac{1-t}{p}\right)$ et les bornes des intégrales sont dans le "bon sens". Donc :

$$\left|u^{[p]}(x)\right| \leq \frac{p}{sh(1/p)} \|f\|_\infty \left[sh(\frac{x}{p}) \int_x^1 sh\left(\frac{1-t}{p}\right) dt + sh(\frac{1-x}{p}) \int_0^x sh\left(\frac{t}{p}\right) dt\right] = \|f\|_\infty \,\widehat{u}^{[p]}(x)$$

où $\widehat{u}^{[p]}$ est la fonction étudiée à la question 11.

L'encadrement du 11.c) (*il faut bien qu'il serve à quelque chose !*) conduit ensuite à

$$\left\|u^{[p]}\right\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{8} \qquad \text{et} \qquad M_p \leq \|f''\|_\infty + \|f\|_\infty \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{8p^4}\right)$$

– *majoration des* $\sum\limits_{j=1}^{n} (B_p)_{ij}$:

Considérons la solution $\widehat{U}^{[p]}$ du système (4) correspondant au vecteur $\widehat{F}$ dont toutes les composantes valent 1; on peut écrire : $A_p\widehat{U}^{[p]} = \widehat{F}$ soit $\widehat{U}^{[p]} = B_p\widehat{F}$ ou encore :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \widehat{u_i}^{[p]} = \sum_{j=1}^{n} (B_p)_{ij} \geq 0$$

Reprenons, de plus, le vecteur $\widehat{U} = A^{-1}\widehat{F} = B\widehat{F}$ introduit en 8.b). Les égalités $A\widehat{U} = \widehat{F}$ et $\left(A + \dfrac{1}{p^2}I_n\right)\widehat{U}^{[p]} = \widehat{F}$ mènent à $A\left(\widehat{U}^{[p]} - \widehat{U}\right) = -\dfrac{1}{p^2}\widehat{U}^{[p]}$ c'est-à-dire :

$$\widehat{U}^{[p]} - \widehat{U} = -\frac{1}{p^2}B\widehat{U}^{[p]}.$$

Nous avons vu au 8.b) que la matrice B est à coefficients positifs et que, pour tout i, $\widehat{u}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} B_{ij} \leq \dfrac{1}{8}$; il en résulte que les composantes du vecteur $\widehat{U}^{[p]} - \widehat{U}$ sont négatives et que :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad 0 \leq \widehat{u_i}^{[p]} \leq \widehat{u}_i \leq \frac{1}{8}$$

Conclusion : $\forall i \in \{1..n\}$ $\qquad \left|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)\right| \leq \dfrac{h^2}{96}M_p \leq \dfrac{h^2}{96}\left(\|f''\|_\infty + \|f\|_\infty\left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{8p^4}\right)\right).$