Corrigé de l'épreuve X–E.S.P.C.I. PC* Math 1 2000

Première partie

1. On a $\varphi_0(j)=1$ pour tout j. On peut supposer $k\geq 1$.

$\longrightarrow$ Pour $j\in\{0,1,\ldots,k-1\}$, j est racine de φ_k donc $\varphi_k(j)=0$.

$\longrightarrow$ Pour $j\geq k$, $\varphi_k(j)=\dfrac{1}{k!}j(j-1)\cdots(j-k+1)=\dfrac{1}{k!}\dfrac{j!}{(j-k)!}=\dbinom{j}{k}$; ainsi $\varphi_k(j)=\binom{j}{k}$ pour tout $j\in\mathbf{N}$.

$\longrightarrow$ Pour $j<k$ on pose $j=-p$ avec $p>0$, alors

$$\varphi_k(j)=\frac{1}{k!}(-p)(-p-1)\cdots(-p-k+1)=\frac{(-1)^k}{k!}p(p+1)\cdots(p+k-1)=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{p+k-1)!}{(p-1)!}=(-1)^k\binom{p+k-1}{k}^{(1)}.$$

2. On a $P_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(n-X)$ car $\varphi_{n-k}=0$ pour $k>n$; $\varphi_0=1$, $\varphi_1=X$ et $\varphi_2=\frac12X(X-1)$.

a) $P_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(n-X)=\varphi_0(X)\varphi_0(N-X)=1.$

$P_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(n-X)=\varphi_0(X)\varphi_1(N-X)-\varphi_1(X)\varphi_0(N-X)=N-2X$

$P_2=\varphi_0(X)\varphi_2(N-X)-\varphi_1(X)\varphi_1(N-X)+\varphi_2(X)\varphi_0(N-X)=2X^2-NX+\dfrac12N(N-1)$

b) φ_k est de degré k et de coefficient dominant $\frac{1}{k!}$.
Alors $\varphi_p(N-X)=\frac{1}{p!}(N-X)^p+a_{p-1}(N-X)^{p-1}+\cdots$ est de degré p et de coefficient dominant $\frac{(-1)^p}{p!}$. Ainsi $(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(n-X)$ est de degré $k+(n-k)=n$ et de coefficient dominant $(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{k}$.
Donc P_n est de degré au plus n et le coefficient de X^n est $\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{k}=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}=\frac{(-1)^n}{n!}2^n$:
P_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}2^n$

c) $P_n(j)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\varphi_k(j)\varphi_{n-k}(N-j)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{N-j}{n-k}$ d'après **1.**.

3. $f_j(u)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}P_n(j)u^n=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{N-j}{n-k}u^n=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{j}{k}\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{N-j}{n-k}u^n\right)$

Or $\binom{j}{k}=0$ pour $k>j$, $\binom{N-j}{n-k}=0$ pour $n<k$ et $\binom{N-j}{p}=0$ pour $p\geq N-j$ donc

$$f_j(u)=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\left(\sum_{n=k}^{N}\binom{N-j}{n-k}u^n\right)=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\left(\sum_{p=0}^{N-k}\binom{N-j}{p}u^{p+k}\right)\text{ avec } N-j\leq N-k$$

$$=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u^k\left(\sum_{p=0}^{N-j}\binom{N-j}{p}u^p\right)=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u^k(1+u)^{N-j}=(1-u)^j(1+u)^{N-j}.$$

4. a)

$$F(u,v)=\sum_{j=0}^{n}\binom{N}{j}f_j(u)f_j(v)=\sum_{j=0}^{n}\binom{N}{j}\big((1-u)(1-v)\big)^j\big((1+u)(1+v)\big)^{N-j}$$

$$=\big((1-u)(1-v)+(1+u)(1+v)\big)^N=(2+2uv)^N=2^N(1+uv)^N$$

---

(1) Les φ_k sont appelés polynômes de Newton ; on voit que $\varphi_k(j)$ est entier pour tout $j\in\mathbf{Z}$.

b) On suppose $0 \leq b < a \leq N$: on a $\dfrac{\partial^a F}{\partial u^a}(u,v) = 2^N v^a \dfrac{N!}{(N-a)!}(1+uv)^{N-a}$.

On pose $P_{a,u}(v) = \frac{\partial^a F}{\partial u^a}(u,v)$ considéré comme polynôme en v.

0 est racine d'ordre a de $P_{a,u}$ donc, pour $b \leq a$, $0 = \big(P_{a,u}\big)^{(b)}(0)$.

Ainsi $\dfrac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(u,0) = 0$ pour tout u ; en particulier $\dfrac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = 0$.

Dans le cas $a < b$ on a la même démonstration. Pour le cas $a = b$ on va appliquer la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0,0) &= \frac{\partial^a}{\partial v^a}\Big(2^N v^a \frac{N!}{(N-a)!}(1+uv)^{N-a}\Big)(0,0)\\ &= 2^N \frac{N!}{(N-a)!}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}\frac{\partial^k v^a}{\partial v^k}(0,0)\frac{\partial^{a-k}(1+uv)^{N-a}}{\partial v^{a-k}}(0,0) \text{ or } \frac{\partial^k v^a}{\partial v^k}(0,0) = 0 \text{ pour } k < a\\ &= 2^N \frac{N!}{(N-a)!}\binom{a}{a}\frac{\partial^a v^a}{\partial v^a}(0,0)(1+uv)^{N-a}(0,0) = 2^N \frac{N!a!}{(N-a)!}\end{aligned}$$

5. a) On a $\langle P \mid Q\rangle = \langle Q \mid P\rangle$, $\langle P \mid aQ+bR\rangle = a\langle P \mid Q\rangle + b\langle P \mid R\rangle$ et $\langle P \mid P\rangle = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\big(P(j)\big)^2 \geq 0$ car $\binom{N}{j} > 0$. Si on a $\langle P \mid P\rangle = 0$ alors $\big(P(j)\big)^2 = 0$ pour tout $j \in \{0,1,\dots,N\}$ donc P admet N racines distinctes ; comme P appartient à $\mathbf{R}_N[X]$ on en déduit que $P = 0$.

Ainsi $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scalaire.

b) La définition $f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j)u^n$ implique $\dfrac{d^n f_j}{u^n}(0) = n!P_n(j)$. Ainsi

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(u,v) = \frac{\partial^b}{\partial v^b}\sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\frac{\partial^a f_j(u)f_j(v)}{\partial u^a}(u,v) = \frac{\partial^b}{\partial v^b}\sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\frac{d^a f_j}{du^a}(u)f_j(v) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\frac{d^a f_j}{du^a}(u)\frac{d^b f_j}{dv^b}(v)$$

donc $\displaystyle\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\frac{d^a f_j}{du^a}(0)\frac{d^b f_j}{dv^b}(0) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} a!P_a(j)b!P_b(j) = a!b!\langle P_a \mid P_b\rangle$.

D'après la question **4. b)** on en déduit que[(2)] $\langle P_a \mid P_b\rangle = 0$ pour $a \neq b$: la famille est orthogonale.

6. On a $\displaystyle\frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n-1}$ donc $\displaystyle(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n-1} - \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n+1}$:

le coefficient de u^n dans $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u)$ est donc $(n+1)P_{n+1}(j) - (n-1)P_{n-1}(j)$ pour $1 \leq n \leq N-1$.

De plus, pour $1 \leq j \leq N-1$, $\frac{df_j}{du}(u) = (-j)(1-u)^{j-1}(1+u)^{N-j} + (N-j)(1-u)^j(1+u)^{N-j-1}$ donc $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u) = \big(-j(1+u) + (N-j)(1-u)\big)f_j(u) = \big((N-2j) - Nu\big)f_j(u)$:

le coefficient de u^n dans $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u)$ est aussi $(N-2j)P_n(j) - NP_{n-1}(j)$.

Pour $j = 0$, $(1-u^2)\frac{df_0}{du}(u) = N(1-u)f_0(u)$: le coefficient de u^n est $NP_n(0) - NP_{n-1}(0)$.

Pour $j = N$, $(1-u^2)\frac{df_N}{du}(u) = -N(1+u)f_N(u)$: le coefficient de u^n est $-NP_n(N) - NP_{n-1}(N)$.

On a donc, pour tout $j \in \{0,1,\dots,N\}$, $(N-2j)P_n(j) - NP_{n-1}(j) = (n+1)P_{n+1}(j) - (n-1)P_{n-1}(j)$ donc le polynôme $Q = (n+1)P_{n+1} - (N-2X)P_n + (N-n+1)P_{n-1}$ s'annule en tout $j \in \{0,1,\dots,N\}$.

On a $P_k \in \mathbf{R}_k[X]$ donc $Q \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$; de plus le coefficient de X^{n+1} est, d'après la question **2. b)**, $(n+1)(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + 2.(-1)^n\frac{2^n}{n!} = 0$ donc Q appartient à $\mathbf{R}_n[X]$.

Or Q admet au moins $n+1$ racines distinctes et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$: on en déduit $Q = 0$.

Ainsi, pour tout m tel que $1 \leq m \leq N-1$, $(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0$.

(2) Et aussi $\langle P_a \mid P_a\rangle = 2^N\binom{N}{a}$.

Deuxième partie

7. a) $d(I,J)=0$ est équivalent à $I\triangle J=\emptyset$.
On a $I\triangle J=\big(I\cup J\big)\setminus\big(I\cap J\big)$ avec $\big(I\cap J\big)\subset\big(I\cup J\big)$ donc $d(I,J)=0$ est équivalent à $\big(I\cap J\big)=\big(I\cup J\big)$.
Or $\big(I\cap J\big)\subset I\subset\big(I\cup J\big)$ et $\big(I\cap J\big)\subset J\subset\big(I\cup J\big)$ donc la condition $\big(I\cap J\big)=\big(I\cup J\big)$ implique $I=J$.
Inversement si $I=J$ alors $I\triangle J=\emptyset$ donc $\big[d(I,J)=0\big]\iff\big[I=J\big]$.

Si $d(I,J)=1$ alors $I\triangle J$ est un singleton, que l'on note $\{a\}$. On suppose, par exemple, que a appartient à I. Alors a ne peut pas appartenir à J. De plus $\big(I\cup J\big)=\big(I\cap J\big)\cup\{a\}$.
On a donc $\big(I\cap J\big)\subset J\subset\big(I\cup J\big)=\big(I\cap J\big)\cup\{a\}$ avec $a\notin J$ donc $J=\big(I\cap J\big)$ et
$\big(I\cap J\big)\subset I\subset\big(I\cup J\big)=\big(I\cap J\big)\cup\{a\}$ avec $a\in I$ donc $J=\big(I\cap J\big)\cup\{a\}=J\cup\{a\}$.
Inversement si $I=J\cup\{a\}$ avec a n'appartenant pas à J alors $I\triangle J=\{a\}$ donc $d(I,J)=1$.
$\big[d(I,J)=1\big]\iff\big[I=J\sqcup\{a\}\text{ou }J=I\sqcup\{a\}\big]$ où le symbole $\sqcup$ signifie une union disjointe.

b) Détaillons $I\triangle J$: si $I=\big(I\cap J\big)\sqcup I'$ et $J=\big(I\cap J\big)\sqcup J'$ alors $I\cup J=\big(I\cap J\big)\sqcup I'\sqcup J'$ donc $I\triangle J=I'\sqcup J'$.
Alors $\big(I\triangle J\big)\cap I=\big(I'\sqcup J'\big)\cap\big((I\cap J)\sqcup I'\big)=I'$ car $\big(I\cap J\big)\cap J'=\emptyset$.
On en déduit que $\big(I\triangle J\big)\triangle I=J'\sqcup\big(I\cap J\big)=J$ donc $d\big((I\triangle J),I\big)=\mathrm{Card}J$.

8. On va classer les parties A telles que $d(A,I)=1$.

$\longrightarrow$ Si $A=I\sqcup\{a\}$ avec a appartenant à J. On pose $I=\big(I\cap J\big)\sqcup I'$, $J=\big(I\cap J\big)\sqcup J'$ et $J'=J''\sqcup\{a\}$.
On a $A\cap J=\big(I\cup\{a\}\big)\cap J=\big(I\cap J\big)\cup\big(\{a\}\cap J\big)=\big(I\cap J\big)\sqcup\{a\}$ car $a\notin\big(I\cap J\big)\subset I$ donc
$A=I\sqcup\{a\}=\big(I\cap J\big)\sqcup I'\sqcup\{a\}=\big(A\cap J\big)\sqcup I'$ et $J=\big(I\cap J\big)\sqcup J''\sqcup\{a\}=\big(A\cap J\big)\sqcup J''$.
On en déduit que $A\triangle J=I'\sqcup J''$ et $I\triangle J=I'\sqcup J'=I'\sqcup J''\sqcup\{a\}$ donc $\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)=\mathrm{Card}\big(A\triangle J\big)+1$.

$\longrightarrow$ Si $A=I\sqcup\{a\}$ avec a n'appartenant pas à J. On pose $I=\big(I\cap J\big)\sqcup I'$ et $J=\big(I\cap J\big)\sqcup J'$.
On a $A\cap J=\big(I\cup\{a\}\big)\cap J=\big(I\cap J\big)\cup\big(\{a\}\cap J\big)=\big(I\cap J\big)$ car $\{a\}\cap J=\emptyset$ donc
$A=I\sqcup\{a\}=\big(I\cap J\big)\sqcup I'\sqcup\{a\}=\big(A\cap J\big)\sqcup I'\sqcup\{a\}$ et $J=\big(I\cap J\big)\sqcup J'=\big(A\cap J\big)\sqcup J'$.
On en déduit que $A\triangle J=I'\sqcup\{a\}\sqcup J'=I\triangle J\sqcup\{a\}$ donc $\mathrm{Card}\big(A\triangle J\big)=\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)+1$.

$\longrightarrow$ Si $I=A\sqcup\{a\}$ avec a appartenant à J on est dans le premier cas en échangeant les rôles de A et de I donc $\mathrm{Card}\big(A\triangle J\big)=\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)+1$.

$\longrightarrow$ Si $I=A\sqcup\{a\}$ avec a n'appartenant pas à J on est dans le deuxième cas en échangeant les rôles de A et de I donc $\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)=\mathrm{Card}\big(A\triangle J\big)+1$.

Ainsi si $d(A,I)=1$ alors $d(A,J)=d(I,J)\pm 1$ donc $\gamma_j^k=0$ si $j\notin\{k-1,k+1\}$.
On a $d(A,J)=d(I,J)-1$ si et seulement si

— $A=I\sqcup\{a\}$ avec a appartenant à J ; comme a n'appartient pas à I on choisit a dans $J\setminus I$
— $I=A\sqcup\{a\}$ avec a n'appartenant pas à J ; comme a appartient à I on choisit a dans $I\setminus J$

Les ensembles A tels que $d(A,J)=d(I,J)-1$ sont donc définis par un élément de $J\setminus I\sqcup I\setminus J=I\triangle J$;
il y a $\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)$ choix distincts possibles donc $\gamma_{k-1}^k=d(I,J)=k$.
On a $d(A,J)=d(I,J)+1$ si et seulement si

— $A=I\sqcup\{a\}$ avec a n'appartenant pas à J ; comme a n'appartient pas à I on choisit a dans $E\setminus(I\cup J)$
— $I=A\sqcup\{a\}$ avec a appartenant à J ; comme a appartient à I on choisit a dans $I\cap J$

Les ensembles A tels que $d(A,J)=d(I,J)-1$ sont donc définis par un élément de $E\setminus I\triangle J$;
il y a $N-\mathrm{Card}\big(I\triangle J\big)$[3] choix distincts possibles donc $\gamma_{k+1}^k=N-d(I,J)=N-k$.

[3] Il est normal de trouver une somme égale à N. Pour fabriquer A tel que $d(I,A)=1$ on choisit un élément de E : s'il appartient à I on l'enlève, s'il n'appartient pas à I on l'ajoute.

Troisième partie

9. **a)** $d(I,J)$ est le cardinal d'une partie de E donc $d(I,J) \leq \text{Card}E = N$. Pour $n > N$ A_n est la matrice nulle. $d(I,J) = 0$ si et seulement si $I = J$ donc $A_0 = \mathcal{J}$.

b) On a $A_1A_m = C$ avec $(C)_{pq} = \displaystyle\sum_{r=1}^{2^N}(A_1)_{pr}(A_m)_{rq}$. Comme les coefficients des A_n sont égaux à 1 ou 0 $(C)_{pq}$ est le nombre d'entiers r tels que $(A_1)_{pr} = (A_m)_{rq} = 1$ c'est–à–dire le nombre de parties I_r de E telles que $d(I_p, I_r) = 1$ et $d(I_r, I_q) = m$; avec les notations du **8.** on a $(C)_{pq} = \gamma_m^k$ avec $k = d(I_p, I_q)$.
Pour $k = d(I_p, I_q) \neq m \pm 1$ on a $(C)_{pq} = 0$, pour $d(I_p, I_q) = m - 1$ on a $(C)_{pq} = \gamma_m^{m-1} = N - m + 1$ et pour $d(I_p, I_q) = m + 1$ on a $(C)_{pq} = \gamma_m^{m+1} = m + 1$. Ainsi $A_1A_m = C = (N - m + 1)A_{m-1} + (m + 1)A_{m+1}$.

10. $P_0 = 1$ donc $P_0(A) = \mathcal{J} = A_0$. $P_1 = N - 2X$ donc $P_1(A) = N\mathcal{J} - 2A = N\mathcal{J} - 2\frac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1) = A_1$.
Si on suppose $P_n(A) = A_n$ et $P_{n-1}(A) = A_{n-1}$ pour $1 \leq n \leq N - 1$ alors, en utilisant **6.**,

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(A) &= \big(N\mathcal{J} - 2A\big)P_n(A) - (N - n + 1)P_{n-1}(A) = A_1A_n - (N - n + 1)A_{n-1} \\ &= (N - n + 1)A_{n-1} + (n + 1)A_{n+1} - (N - n + 1)A_{n-1} = (n + 1)A_{n+1} \text{ d'après } \mathbf{9.b)}\end{aligned}$$

Ainsi $P_{n+1}(A) = A_{n+1}$ donc, par récurrence, $P_n(A) = A_n$ pour tout entier $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

11. On classe les parties J de E de cardinal j par le cardinal de leur intersection avec I :
si $\text{Card}(J) = j$ et $\text{Card}\big(I \cap J\big) = k$ alors $J = \big(I \cap J\big) \sqcup J'$ avec
$I \cap J$ sous–ensemble à k éléments de I donc peut être choisi parmi $\binom{i}{k}$ possibilités et
J' sous–ensemble à $j - k$ éléments de $E \setminus I$ donc peut être choisi parmi $\binom{N-i}{j-k}$ possibilités.
il y a donc $\binom{i}{k}\binom{N-i}{j-k}$ tels sous–ensembles : $\displaystyle\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}J=j,\ \text{Card}(I\cap J)=k}} (-1)^{\text{Card}(I\cap J)} = \binom{i}{k}\binom{N-i}{j-k}(-1)^k.$

$$\text{d'où} \sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}J=j}} (-1)^{\text{Card}(I\cap J)} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}J=j,\ \text{Card}(I\cap J)=k}} (-1)^{\text{Card}(I\cap J)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{N-i}{j-k}(-1)^k = P_j(i)$$

d'après **2. c)** car $\binom{i}{k} = 0$ pour $k > i$.

12. **a)** On écrit toujours $I = \big(I\cap J\big)\sqcup I'$ et $J = \big(I\cap J\big)\sqcup j'$. Alors $\big(I\triangle J\big)\cap K = \big(I'\sqcup J'\big)\cap K = \big(I'\cap K\big)\sqcup\big(J'\cap K\big)$.
Ainsi $(-1)^{\text{Card}((I\triangle J)\cap K)} = (-1)^{\text{Card}(I'\cap K)}(-1)^{\text{Card}(J'\cap K)}$.
De plus $I \cap K = \big((I \cap J) \sqcup I'\big) \cap K = \big(I \cap J \cap K\big) \sqcup \big(I' \cap K\big)$; de même $J \cap K = \big(I \cap J \cap K\big) \sqcup \big(I' \cap K\big)$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } (-1)^{\text{Card}(I\cap K)}(-1)^{\text{Card}(J\cap K)} &= (-1)^{\text{Card}(I\cap J\cap K)}(-1)^{\text{Card}(I'\cap K)}(-1)^{\text{Card}(I\cap J\cap K)}(-1)^{\text{Card}(J'\cap K)} \\ &= (-1)^{\text{Card}(I'\cap K)}(-1)^{\text{Card}(J'\cap K)} = (-1)^{\text{Card}((I\triangle J)\cap K)}.\end{aligned}$$

b) On note $A = I\triangle J$ et $a = \text{Card}A$. $a = 0$ si et seulement si $I = J$. On utilise **11.** et **3.**.

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(I\cap K)}(-1)^{\text{Card}(J\cap K)} &= \sum_{K\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(A\cap K)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}K=k}} (-1)^{\text{Card}(A\cap K)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P_k(a) = f_a(1) = (1-1)^a(1+1)^{N-a} = \begin{cases} 2^N & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

13. **a)** Les coefficients de B_k sont $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N} P_k(n)(A_n)_{pq}$ or $(A_n)_{pq} = 0$ pour tout n sauf $(A_n)_{pq} = 1$ pour $n = d(I_p, I_q)$: on a donc $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N}P_k\big(d(I_p, I_q)\big)$. De plus $I_p\triangle I_q$ est de cardinal $d(I_p, I_q)$ donc, d'après **11.**, $(B_k)_{pq} = \dfrac{1}{2^N}\displaystyle\sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}K=k}} (-1)^{\text{Card}((I_p\triangle I_q)\cap K)} = \dfrac{1}{2^N}\displaystyle\sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E) \\ \text{Card}K=k}} (-1)^{\text{Card}(I_p\cap K)}(-1)^{\text{Card}(I_q\cap K)}$. Si on note $B_k.B_l = C$ alors $(C)_{pq} = \sum_{r=1}^{2^N}(B_k)_{pr}(B_l)_{rq}$ puis

$$(C)_{pq} = \sum_{r=1}^{2^N} \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}K=k}} (-1)^{\mathrm{Card}(I_p\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I_r\cap K)} \right) \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\substack{L\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}L=l}} (-1)^{\mathrm{Card}(I_r\cap L)}(-1)^{\mathrm{Card}(I_q\cap L)} \right)$$

$$= \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{I\in\mathcal{P}(E)} \sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}K=k}} \sum_{\substack{L\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}L=l}} (-1)^{\mathrm{Card}(I_p\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I\cap L)}(-1)^{\mathrm{Card}(I_q\cap L)}$$

$$= \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}K=k}} \sum_{\substack{L\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}L=l}} (-1)^{\mathrm{Card}(I_p\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I_q\cap L)} \underbrace{\sum_{I\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{\mathrm{Card}(I\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I\cap L)}}_{=0 \text{ si } K\neq L \text{ d'après } \mathbf{12.\ b)}}$$

Or on ne peut avoir $K = L$ que si $k = l$ donc $B_k.B_l = 0$ si $k \neq l$ et, pour $k = l$,

$$(C)_{pq} = \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{\substack{K\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{Card}K=k}} (-1)^{\mathrm{Card}(I_p\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(I_q\cap K)} 2^N = (B_k)_{pq} \text{ donc } (B_k)^2 = B_k.$$

b) B_k est donc une matrice de projecteur donc $\mathrm{rg}(B_k) = \mathrm{tr}(B_k)$.
Or les termes diagonaux de A_n sont nuls pour $n \neq 0$ car $d(I, I) = 0$ donc $\mathrm{tr}(A_n) = 0$ et $\mathrm{tr}(A_0) = \mathrm{tr}(\mathcal{J}) = 2^N$

d'où $\mathrm{tr}(B_k) = \dfrac{1}{2^N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} P_k(n)\mathrm{tr}(A_n) = \dfrac{1}{2^N} P_k(0)2^N = P_k(0) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{0}{i}\binom{N-0}{k-i} = \binom{N}{k}$ d'après **2.c)**.

14. a) Les B_k sont des projecteurs ; on note E_k l'image de B_k (dans $\mathbf{R}^{2^N}$).
Si $0_E = X_0 + X_1 + \cdots + X_N$ avec X_k appartenant à E_k alors $X_k = B_k.X_k$ donc
$0_E = B_l(0_E) = \sum_{k=0}^N B_l(x_k) = \sum_{k=0}^N B_l.B_k.X_k = B_l.X_l = X_l$ car $B_l.B_k = 0$ pour $k \neq l$.
Les images des B_k sont en somme directe ; de plus la somme des dimensions est
$\sum_{k=0}^N \mathrm{rg}(B_k) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N =$: on a $\mathbf{R}^{2^N} = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_N$.
On va donc exprimer les A_n comme combinaisons linéaires des B_k ce qui donnera la diagonalisation.

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k B_k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \left(\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{N} P_k(n) A_n \right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_k}{2^N} P_k(n) \right) A_n = \sum_{n=0}^{N} P(n)A_n \text{ où } P = \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_k}{2^N} P_k.$$

Si $P = L_i$ le polynôme de Lagrange tel que $L_i(j) = \delta_{i,j}$ pour $j \in E$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k B_k = \sum_{k=0}^{N} L_i(n)A_n = A_i$.

Il reste à décomposer les polynômes L_i.
La famille $\big(P_0, P_1, \ldots, P_N\big)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_N[X]$ donc la décomposition d'un vecteur dans cette base est $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle P \mid P_k\rangle}{\langle P_k \mid P_k\rangle} P_k$. On a vu que $\langle P_k \mid P_k\rangle = 2^N \binom{N}{k}$.

$$\langle L_i \mid P_k\rangle = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} L_i(n)P_k(n) = \binom{N}{i} P_k(i) \text{ donc } L_i = \sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{N}{i}P_k(i)}{2^N\binom{N}{k}} P_k.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha_k = \frac{\binom{N}{i}P_k(i)}{\binom{N}{k}}$ on a $\sum_{k=0}^N \alpha_k B_k = A_i$;
les valeurs propres de A_i sont les réels $\frac{\binom{N}{i}P_k(i)}{\binom{N}{k}}$ pour k appartenant à E
et les sous–espaces propres associés sont les images des B_k.
b)Pour $i = 1$ les valeurs propres de A_1 sont les réels $\frac{\binom{N}{1}P_k(1)}{\binom{N}{k}}$.

$$\text{Or } P_k(1) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{1}{n}\binom{N-1}{k-n} = \sum_{n=0}^{1} (-1)^n \binom{1}{n}\binom{N-1}{k-n} = \binom{N-1}{k} - \binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!(N-2k)}{k!(N-k)!}.$$

Les valeurs propres sont donc les entiers $N - 2k$ pour k appartenant à E qui sont distinctes donc les sous–espaces propres sont les $\mathrm{Im}(B_k)$ qui sont de dimensions $\mathrm{rg}(B_k) = \binom{N}{k}$