A2021 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

— Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1)\cdots 2.1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} Q(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k-ème.

Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$;

— *log-concave* si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$;

— *ultra log-concave* si $(\frac{a_k}{\binom{n}{k}})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

1 ▷ Montrer que la suite binomiale $(\binom{n}{k})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

2 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

4 ▷ Montrer que P' est à racines toutes réelles.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5 ▷ Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6 ▷ Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1} Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave.

On considère comme précédemment un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n à racines toutes réelles.

7 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

8 ▷ Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Dans la question 27 ▷ , nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

Théorème 1 *Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de Q ont toutes le même signe. Alors le polynôme*

$$P \circ Q(X) := \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k (k!) X^k$$

est à racines toutes réelles.

Quelques exemples

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n.

9 ▷ Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.

10 ▷ On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$.

11 ▷ Soit B une matrice symétrique et on suppose comme dans la question précédente que les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

On considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx. \end{array} \right.$$

12 ▷ Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

13 ▷ Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

— les L_i sont de degré i ;

— pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

14 ▷ Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme L_n est à racines toutes réelles.

Soit $\Big(B_i\Big)_{i=1,\cdots,n}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli $\mathcal{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs b_i, i.e. $\mathbf{P}(B_i = 1) = b_i$ et $\mathbf{P}(B_i = 0) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

15 ▷ Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.

16 ▷ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geqslant 0$ pour tout $k = 0, \cdots, n$. On suppose en outre que P est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernouilli indépendantes B_i telles que pour tout $k = 0, \cdots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n B_i = k)$.

Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n. On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $\beta_1, \overline{\beta}_1 \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de β_i. On note m_i la multiplicité de α_i et n_j celle de β_j et $\overline{\beta}_j$.
Pour tout $k \geqslant 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^{s} n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_k^{i-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_k^{i-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\beta}_k^{i-1}$.

17 ▷ Montrer que $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \cdots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.
Indication : on pourra utiliser les matrices de Vandermonde.

18 ▷ Montrer que

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \Big(\psi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n)^2 \Big),$$

s'écrit sous la forme $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$.

19 ▷ Montrer que si P est à racines toutes réelles, alors $q : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$, est à valeurs positives.

On suppose à présent $r < n$ et on écrit pour tout $i = 1, \cdots, s$

$$\psi_i^2 + \overline{\psi}_i^2 = 2\,\mathrm{Re}(\psi_i)^2 - 2\,\mathrm{Im}(\psi_i)^2.$$

20 ▷ Montrer que les applications linéaires $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ suivantes sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendantes :

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \mathrm{Re}(\psi_1), \mathrm{Im}(\psi_1), \cdots, \mathrm{Re}(\psi_s), \mathrm{Im}(\psi_s).$$

21 ▷ Conclure que P est à racines toutes réelles si et seulement si q est à valeurs positives sur $\mathbf{R}^n$.
Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ *qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.*

Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \gamma_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si P a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

22 ▷ Montrer que la suite définie par $\gamma_n = n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23 ▷ Montrer que si $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k \geqslant 0$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant k} = (\gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots)$ l'est aussi.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que P a toutes ses racines réelles : on les note $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et on admet que $\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} = a_n^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

24 ▷ Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1} = 0$ puis que $\gamma_m = 0$ pour tout $m \geqslant k$.
Indication : on pourra utiliser les expressions de $\Gamma((1+X)^{k+1})$ *et* $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$, *puis, pour* $m \geqslant k+2$, *raisonner sur les racines de* $\Gamma((1+X)^m)$.

25 ▷ On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.
Indication : on pourra utiliser encore l'expression de $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$.

Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

26 ▷ Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

Réciproquement supposons que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x = z/n$, de sorte que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.

27 ▷ En utilisant le théorème 1, montrer que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28 ▷ Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2 \geqslant \gamma_{k+1}\gamma_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$.

29 ▷ En déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

30 ▷ En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

31 ▷ Réciproquement montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.
Indication : pour cette question, toute tentative de réponse, partielle ou purement qualitative, sera considérée par le Jury.

FIN DU PROBLÈME