

Corrigé de la première épreuve de mathématique Mines-Ponts PC 2021

1 Questions de cours

$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$ I est un sous ensemble fini ou dénombrable.

1)

X est d'espérance finie si $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente, avec cette définition X admet une espérance finie ssi $|X|$ admet une espérance finie.

2)

Pour $n \in I$ $0 \leq |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \leq M \mathbb{P}(X = x_n)$.

Comme la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge de somme 1, on a donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs (CCSTP) la convergence de $\sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$

2 Généralités sur les variables aléatoires

3)

Pour les variables X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le programme :

X admet une espérance finie ssi $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Si X vérifie $(\mathcal{D}_a)$, le série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ diverge par comparaison avec la série harmonique.

On sait aussi que X^2 admet une espérance finie implique que X admet une espérance finie. (Résultat de cours)

Dans ce cas X^2 n'admet pas d'espérance finie.

4)

On utilise le théorème 1 en prenant $Y = -X$.

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(-f(X))$$

(suivent la même loi), par linéarité de l'espérance on trouve : $2\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

5)

Soit (a, b) un couple quelconque.

$$\mathbb{P}((-X, -Y) = (a, b)) = \mathbb{P}((-X = a) \cap (-Y = b)) = \mathbb{P}(-X = a) \mathbb{P}(-Y = b)$$

(les variables sont indépendantes). Comme X et Y sont symétriques on a alors :

$$\mathbb{P}((-X, -Y) = (a, b)) = \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) = \mathbb{P}((X, Y) = (a, b))$$

On conclut en utilisant le théorème 1 à l'application u définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(a, b) \mapsto a + b$.

3 Deux sommes de séries

6)

$u \mapsto \frac{z}{1-uz}$ est continue sur $[0, 1]$, l'intégrale est donc bien définie pour tout $t \in [0, 1]$.

La fonction L est de classe C^1 , et sa dérivé est :

$$L'(t) = \frac{z}{1-tz} \quad \forall t \in [0, 1]$$

On remarque que la fonction dérivé est de classe C^∞ , donc L est aussi de classe C^∞ . Par une simple récurrence on trouve :

$$L^{(n)}(t) = \frac{z^n(n-1)!}{(1-ut)^n} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

7)

$$|1-tz| \geq 1-|tz| = 1-t|z| \geq 1-t \quad (|z| \leq 1).$$

$$|1-tz| \geq 1-|tz| = 1-t|z| = 1-t+t(1-|z|)$$

Si $|z| < 1$ l'inégalité est donc stricte.

Si $|z| = 1$, en posant $z = a + ib$ l'écriture algébrique, on trouve :

$$|1-tz|^2 - (1-t)^2 = 2t(1-a)$$

Comme $t \in]0, 1]$, on ne peut avoir l'égalité que si $a = 1$, donc $b = 0$ et $z = 1$ ce qui est impossible.

8)

On pose : $f_n(t) = \left(\frac{1-t}{1-tz}\right)^n$ $g_n(t) = \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} \quad \forall t \in]0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent simplement vers la fonction nulle et on a :

$$|f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t) \quad |g_n(t)| \leq \left|\frac{1}{1-tz}\right| = \psi(t) \quad \forall t \in]0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

les fonctions dominatrices φ et ψ sont intégrables sur $]0, 1]$ (elles sont continues sur $[0, 1]$), on peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée.

9)

La fonction L est de classe C^∞ sur $[0, 1]$, on peut donc écrire la formule de Taylor qu'on peut démontrer par récurrence :

$$L(1) = \sum_{k=1}^n \frac{L^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} L^{(n+1)}(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme : $L^{(k)}(t) = \frac{z^k(k-1)!}{(1-ut)^k}$ on trouve :

$$L(1) = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n z^{n+1}}{(1-tz)^{n+1}} dt$$

On fait tendre n vers ∞ , en utilisant la question précédente on trouve le résultat.

10)

Pour $u \in [0, 1]$ $1 + ue^{it} = 0 \Leftrightarrow ue^{it} = -1$ l'argument est donc congru à π modulo 2π .

La fonction γ est continue (la composée de deux fonctions continues) et ne peut s'annuler sur la partie $[-a, a] \times [0, 1]$ qui est fermée bornée en dimension finie (l'argument ne peut atteindre π), donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe alors $m_a > 0$ tel que :

$$|1 + ue^{it}| \geq m_a \quad \forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1]$$

11)

On écrit : $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du = \int_0^1 h(t, u) du \quad t \in]-\pi, \pi[$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, u) = \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2}.$$

D'après la question 10, pour tout $a \in]0, \pi[$ on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t, u) \right| \leq \frac{1}{m_a^2} \quad \forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1]$$

La fonction dominatrice est intégrable sur le segment $[0, 1]$ (constante), les autres propriétés du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont facile à établir, on a donc la fonction F est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et :

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2} du = -\left[\frac{i}{1 + ue^{it}} \right]_0^1$$

12)

$$F'(t) = -i\left(\frac{1}{1 + e^{it}}\right) - 1 = i\frac{e^{it}}{1 + e^{it}} = i\frac{e^{\frac{it}{2}}}{e^{-\frac{it}{2}} + e^{\frac{it}{2}}} = i\frac{\cos(\frac{t}{2}) + isin(\frac{t}{2})}{2\cos(\frac{t}{2})} = \frac{i}{2} - \frac{\tan(\frac{t}{2})}{2}$$

$$F(t) = \ln(\cos(\frac{t}{2})) + i\frac{t}{2} + cte \quad . \quad \text{Pour } t = 0 \text{ on trouve } F(0) = \ln(2)$$

$$F(t) = \ln(2\cos(\frac{t}{2})) + i\frac{t}{2} \quad \forall t \in]-\pi, \pi[$$

13)

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on prend $z = e^{i\theta} \neq 1$ et $|z| \leq 1$.

$$\text{D'après la question 9 on a : } L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

D'autre part on a :

$$L(1) = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - ue^{i\theta}} du = - \int_0^1 \frac{e^{i(\theta-\pi)}}{1 + ue^{i(\theta-\pi)}} du = -F(\theta - \pi)$$

Et on identifie les parties réelles et imaginaires.

4 Fonction caractéristique d'une variable symétrique

14)

La variable $Y_t = \cos(tX)$ est bornée, donc elle admet une espérance finie d'après la question 2.

$$|\cos(nt)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(nt) \mathbb{P}(X = n) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\cos(nt)| \mathbb{P}(X = n) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

La variable X est symétrique et la fonction cosinus est paire, on conclut facilement que Φ_X est paire.

15)

$$\Phi_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(nt) \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Psi_n(t) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \quad \text{avec :}$$

$$\Psi_0(t) = \mathbb{P}(X = 0) \quad \Psi_n(t) = 2\cos(nt) \mathbb{P}(X = n) \quad n \geq 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

La majoration : $|\Psi_n(t)| \leq 2\mathbb{P}(X = n)$ pour tout réel et pour tout entier naturel n , nous donne la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions Ψ_n sont continues, on déduit alors que Φ_X est continue.

16)

$$\Phi_X(t) = \mathbb{P}(X = 0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) \mathbb{P}(X = n).$$

Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} R_n - R_{n+1} &= \mathbb{P}(|X| \geq n) - \mathbb{P}(|X| \geq n+1) \\ &= [\mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)] + [\mathbb{P}(X \leq -n) - \mathbb{P}(X \leq -n-1)] \\ &= 2\mathbb{P}(X = n) \end{aligned}$$

.

$$R_0 - R_1 = 1 - R_1 = \mathbb{P}(X = 0).$$

Et la relation en découle immédiatement.

Comme la variable X vérifie la propriété $\mathcal{D}_\alpha$, on a alors :

$$R_n \cos(nt) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Et on sait déjà d'après la question 12 que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n}$ converge pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on peut donc séparer les deux sommes et faire un changement d'indice :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} (R_{n+1} \cos(nt)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos((n-1)t) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] \end{aligned}$$

17)

la variable X vérifie la propriété $\mathcal{D}_\alpha$, il existe donc une constante $M > 0$ telle que :

$|R_n - \frac{\alpha}{n}| \leq \frac{M}{n^2}$ pour tout entier naturel non nul n .

La série de fonction $\sum_{n \geq 1} (R_n - \frac{\alpha}{n})e^{int}$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et tous les termes sont continues, on conclut donc que la somme est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une limite en 0 noté C qui est sa valeur en 0 et elle est réelle.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (R_n - \frac{\alpha}{n})e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{int} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n} e^{int}$$

(on peut séparer les deux sommes les séries sont convergentes)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) + i \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) - \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} - \alpha i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

Pour $t \in]0, 2\pi[$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (R_n - \frac{\alpha}{n})e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) + i \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) + \alpha \ln(2\sin(\frac{t}{2})) - \alpha i \frac{\pi - t}{2}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) + \alpha \ln(2\sin(\frac{t}{2})) \longrightarrow_{t \rightarrow 0^+} C$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) - \alpha \frac{\pi - t}{2} \longrightarrow_{t \rightarrow 0^+} 0$$

C'est facile de conclure en utilisant un développement limité de $\sin$ au voisinage de 0.

18)

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \cos(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) \\ &= 1 + [1 - \cos(t)] \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) \end{aligned}$$

Et on utilise la question précédente en remarquant que $\sin(t) \sim t$ au voisinage de 0.

$\Phi_X(0) = 1$, Φ_X est donc dérivable à droite en 0 et sa dérivée droite est $-\frac{\pi\alpha}{2}$, comme la fonction est paire, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée gauche est $\frac{\pi\alpha}{2}$, elle n'est donc pas dérivable en 0.

5 Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19)

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY))$$

$$= \mathbb{E}(\cos(tX))\mathbb{E}(\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX))\mathbb{E}(\sin(tY))$$

(les variables sont indépendantes).

En utilisant la question 4 appliqué à la fonction $\sin$ qui est impaire on trouve :

$$\mathbb{E}(\sin(tX)) = 0 = \mathbb{E}(\sin(tY))$$

Et on a le résultat.

20)

Les variables X_i sont symétriques donc M_n l'est aussi.

$$\Phi_{M_n}(t) = \Phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = (\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right))^n$$

les variables suivent la même loi.

21)

Comme Φ_{M_n} est paire , on va raisonner seulement sur $[0, +\infty[$.

Pour $t = 0$, $\Phi_{M_n}(0) = 1$ pour tout entier non nul.

Pour $t > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$ on a $\frac{t}{n} \in]0, 2\pi[$.

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \implies \Phi_{M_n}(t) = \left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right)$$

On fait un petit développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 et on trouve le résultat.

22)

Si on prend $t_n = 2n\pi$ où n est un entier naturel non nul , on a :

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t_n}{n}\right) = 1 \implies \Phi_{M_n}(t_n) = 1$$

On en déduit que $|\Phi_{M_n}(t_n) - \exp(-\frac{\pi\alpha t_n}{2})| \not\rightarrow 0$.

La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.