Concours Commun Mines-Ponts 2020

Épreuve PC II de mathématiques
Un corrigé

Approximation par des exponentielle-polynômes

I. Résultats préliminaires

I.1 Étude d'une série entière

1. Soit $x > 0$.
$f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle.
On remarque que f_x est strictement positive sur I, par conséquent si $\Gamma(x)$ est convergente alors $\Gamma(x) > 0$ par stricte positivité de l'intégrale.
$\Gamma(x)$ est généralisée en 0 et en $+\infty$.

Étude en 0 :

Soit $t \in]0, 1]$. On a : $f_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1 - x < 1$ car $x > 0$. Donc, d'après le cours, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Étude en $+\infty$:
Soit $t \in [1, +\infty[$. On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées. Donc $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. D'après le cours, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Ainsi $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout $x > 0$.

En résumé : $\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur } I \text{ et à valeurs strictement positives.}}$

On peut remarquer, d'après ce qui précède, que pour tout $x > 0$, f_x est intégrable sur I.

2. Soit $x > 0$.
Considérons $\Gamma(x+1)$ et les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I définies pour $t > 0$ par :
$u(t) = t^x,\ v(t) = -e^{-t}$. On a : $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.
Si le produit uv admet des limites en 0 et en $+\infty$ alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ seront de même nature. En particulier la deuxième intégrale sera convergente puisque la première l'est. Or :
$u(t)v(t) = -t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées ;
$u(t)v(t) = -t^x e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} -t^x = -e^{x\ln t}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} e^{x\ln t} = 0$, vu que $x > 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$.
Ainsi : $[uv]_0^{+\infty} = \displaystyle\lim_{0^+} uv - \lim_{+\infty} uv = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et l'on peut écrire :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).}$$

Conséquence, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

3. On remarque que les coefficients a_n sont non nuls. Pour $x \neq 0$ et à l'aide de la question 2 on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)!}\,\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}|x| = \frac{n+\alpha+1}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert :
si $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente ;
si $|x| > 1$, la série est grossièrement divergente.
On en déduit le rayon de convergence de cette série entière : $\boxed{R = 1.}$

4. Première méthode : à l'aide du Théorème ITT, indication du sujet

Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}t^{n+\alpha}e^{-t}.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I =]0,+\infty[$: $f_n(t) = \dfrac{x^n}{n!}t^{n+\alpha}e^{-t}$. On a :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I par construction.
— $\sum f_n$ converge simplement sur I.
En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$: $f_n(t) = e^{-t}t^\alpha \dfrac{(xt)^n}{n!}$. Or $\sum \dfrac{(xt)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{n!} = e^{xt}$.

Donc $\sum f_n(t)$ est convergente, et sa somme est : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{\alpha}e^{xt} = t^{\alpha}e^{-(1-x)t}$.

La somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : t \mapsto t^{\alpha}e^{-(1-x)t}$ est évidemment continue par morceaux sur I.

— La série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|$ est convergente. En effet, les f_n étant positives, il s'agit de la série $\sum a_n x^n$, qui est absolument convergente puisque $|x| < 1$.

Les hypothèses du théorème d'interversion terme à terme de Lebesgue sont vérifiées. Par conséquent S est intégrable sur I et l'on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t,$$

en d'autres termes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-(1-x)t}\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs l'application $t \mapsto (1-x)t$ est une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, de I dans I. Par conséquent on peut écrire, à l'aide du changement de variable $u = (1-x)t$:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-(1-x)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1-x} \right)^{\alpha} e^{-u}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$: $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.}$

Deuxième méthode : à l'aide d'une équation différentielle

Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme de la série $\sum a_n x^n$ sur $]-1,1[$.

On sait, d'après le cours, que g est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-1,1[$.

Le calcul de la question 3 montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \frac{n+\alpha+1}{n+1}a_n$.

Soit $x \in]-1,1[$. On peut écrire :

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+\alpha+1}{n+1}a_n x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n+1} \right) a_n x^{n+1}.$$

Les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1}x^n$ sont convergentes. Par conséquent :

$$g(x) = a_0 + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0 + xg(x) + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la série $\sum a_n t^n$ est normale, donc uniforme, sur tout segment de $]-1,1[$, en particulier sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$, selon le signe de x. Par conséquent on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$: $g(x) = a_0 + xg(x) + \alpha \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions intervenant dans cette égalité sont dérivables. On a donc, pour tout $x \in]-1,1[$, après dérivation et réarrangement des termes : $(1-x)g'(x) = (1+\alpha)g(x)$.

Enfin : $g(0) = a_0 = \Gamma(\alpha+1)$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipshitz g est l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{1+\alpha}{1-x} y(x) \\ y(0) &= \Gamma(\alpha+1) \end{cases}$$

La résolution est immédiate : $\forall x \in]-1,1[$, $\boxed{g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.}$

I.2 Projections orthogonales

5. F étant de dimension finie : $E = F \oplus F^{\perp}$.

   $\boxed{\text{La projection orthogonale sur } F \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } F^{\perp}.}$

   Plus précisément, si l'on note pour tout $x \in E$, (x', x'') l'unique couple de $F \times F^{\perp}$ tel que $x = x' + x''$, alors π_F est définie par : $\boxed{\pi_F(x) = x'.}$

6. On a déjà, pour tout $y \in F$: $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle e_i$ et $\|y\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle^2$.

   En effet, si $(y_1, \dots, y_n)$ représente les coordonnées de y dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, par bilinéarité du produit scalaire :

   $$\langle y, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_j, e_i \rangle = y_i, \quad \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle^2.$$

   Ensuite, soit $x \in E$. On a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\langle x, e_i \rangle = \langle \pi_F(x), e_i \rangle + \langle x - \pi_F(x), e_i \rangle$.

   Or $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$. Donc : $\langle x, e_i \rangle = \langle \pi_F(x), e_i \rangle$.

   Comme $\pi_F(x) \in F$, on en déduit :

   $$\boxed{\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi_F(x), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.}$$

7. Soit $x \in E$. Le théorème de Pythagore permet d'écrire, puisque $\pi_F(x) \perp x - \pi_F(x)$: $\|x\|^2 = \|x - \pi_F(x) + \pi_F(x)\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2$.
D'après la question 6 on a donc :

$$\boxed{\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.}$$

II. Polynômes de Laguerre

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\boxed{|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2} \iff a^2 + b^2 - 2|ab| \geq 0 \iff (|a| - |b|)^2 \geq 0.}$
La dernière inégalité étant vraie, l'inégalité à établir l'est aussi.

9. Soit $(f, g) \in E_\alpha^2$. Pour $x \geq 0$ on a, d'après la question précédente :

$$|x^\alpha e^{-x} f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} g(x)^2.$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 \, \mathrm{d}x$ étant convergentes, par comparaisons de fonctions positives on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \text{ est (absolument) convergente.}}$$

10. E_α est non vide, puisqu'il contient l'application nulle, et c'est une partie de $C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ par construction.
Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times E_\alpha \times E_\alpha$. Pour $x \geq 0$ on a : $(\lambda f + g)^2(x) = \lambda^2 f(x)^2 + g(x)^2 + 2\lambda f(x) g(x)$.
Par hypothèse sur f et g et d'après la question 9 les applications $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$, $x \mapsto x^\alpha e^{-x} g(x)^2$ et $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x) g(x)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent $x \mapsto x^\alpha e^{-x} (\lambda f + g)(x)^2$ est également intégrable sur $[0, +\infty[$, autrement dit : $\lambda f + g \in E_\alpha$.
Ainsi : $\boxed{E_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } C([0, +\infty[, \mathbb{R}).}$

11. E_α étant un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il contient les fonctions $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a, pour $x > 0$ et avec le même procédé qu'à la question 2 : $x^\alpha e^{-x} x^{2n} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On en déduit que $x \mapsto x^\alpha e^{-x} x^{2n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
De plus $x \mapsto x^\alpha e^{-x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\alpha > -1$ et, pour $n \geq 1$: $\alpha + 2n > 0$ et $x^\alpha e^{-x} x^{2n} \underset{x \to 0^+}{\sim} x^{\alpha + 2n}$, donc $x \mapsto x^\alpha e^{-x} x^{2n}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^\alpha e^{-x} x^{2n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
$\boxed{E_\alpha \text{ contient l'ensemble } \{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}, \text{ donc il contient les fonctions polynomiales.}}$

12. En tout $x > 0$ on a :
$\psi_0(x) = x^{-\alpha} e^x \varphi_0(x) = x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1.$
$\psi_1(x) = x^{-\alpha} e^x \varphi_1'(x) = x^{-\alpha} e^x \big((1 + \alpha) x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x}\big) = -x + \alpha + 1.$

$\psi_2(x) = x^{-\alpha}e^x\varphi_2''(x) = x^{-\alpha}e^x\big((\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x} + x^{\alpha+2}e^{-x}\big)$.
Finalement :

$$\boxed{\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = -x+\alpha+1, \quad \psi_2(x) = x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+2)(\alpha+1).}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La question précédente permet de conjecturer que ψ_n est polynomiale, de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$.
Posons, pour $x > 0$: $u(x) = x^{n+\alpha}$ et $v(x) = e^{-x}$.
u et v étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, utilisons la formule de Leibniz. En tout $x > 0$ on a :

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

On a immédiatement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$u^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j+\alpha)\right) x^{n-k+\alpha} \;\text{ et }\; v^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k}e^{-x}.$$

Une récurrence finie immédiate sur $k \in [\![0, n]\!]$ montre que :

$$\prod_{j=0}^{k-1}(n-j+\alpha) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-k+1+\alpha)}.$$

D'où l'on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$\boxed{\psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-k+1+\alpha)}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)}x^{k}.}$$

ψ_n est bien polynomiale, de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$.

14. D'après la question 9 l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est bien définie sur $E_\alpha \times E_\alpha$.
La symétrie et la bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont immédiates.
Soit $f \in E_\alpha$.
On a : $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \geq 0$, puisque $x^\alpha e^{-x}f(x)^2 \geq 0$ pour tout $x > 0$.
Supposons $\langle f, f\rangle = 0$. L'application (intégrable) $x \mapsto x^\alpha e^{-x}f(x)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Donc, par stricte positivité de l'intégrale, elle est nulle sur $]0, +\infty[$. Par conséquent f est nulle sur $]0, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$ puisqu'elle est continue sur cet intervalle.
Ainsi : $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E_\alpha.}$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
En procédant comme dans la question 13 on a, en $x > 0$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)}x^{n-j+\alpha}e^{-x} = x^{\alpha+1}e^{-x}\eta_{n,k}(x)$$

où

$$\eta_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)} x^{n-j-1}.$$

$\eta_{n,k}$ est polynomiale (et même de degré $n-1$ et de coefficient dominant $(-1)^k$). En effet : $j \in [\![0,k]\!] \iff n-k-1 \leq n-j-1 \leq n-1$. Comme $k \leq n-1$, on a : $n-k-1 \geq 0$.
En particulier $\eta_{n,k}$ est prolongeable par continuité en 0, d'où, puisque $\alpha+1>0$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0.}$$

Enfin, $\eta_{n,k}$ étant polynomiale, il existe $(a,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$ tel que : $\eta_{n,k} \underset{x\to+\infty}{\sim} ax^p$ (plus précisément : $\eta_{n,k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (-1)^k x^{n-1}$).
Par conséquent :

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-\frac{x}{2}}} = x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{2}} \eta_{n,k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax^{\alpha+1+p} e^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right).}$$

16. On a déjà :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x) x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Montrons, par récurrence finie sur $k \in [\![0,n]\!]$, la proposition P_k définie par :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)\, \mathrm{d}x$ *converge et* $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)\, \mathrm{d}x.$

P_0 vient d'être établie.
Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que P_k soit vraie et intégrons par parties.
Les fonctions $\psi^{(k)}$ et $\varphi_n^{(n-k-1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On a :

— $\lim_{x\to 0^+} \psi^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x) = 0.$
En effet, $\psi^{(k)}$ est polynomiale, donc admet une limite en 0^+.
$n-k-1 \in [\![0,n-1]\!]$, donc d'après la question 15 : $\lim_{x\to 0^+} \varphi_n^{(n-k-1)}(x) = 0.$

— $\lim_{x\to+\infty} \psi^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x) = 0.$
En effet, $\psi^{(k)}$ est polynomiale, donc avec le même raisonnement que pour $\eta_{n,k}$ (question 15) on a, pour un certain $q \in \mathbb{N}$: $\psi^{(k)}(x) = O(x^q)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
D'après la question 15 encore, vu que $n-k-1 \in [\![0,n-1]\!]$, on a lorsque x tend vers $+\infty$: $\varphi_n^{(n-k-1)}(x) = o(e^{-\frac{x}{2}})$.
On en déduit : $\psi^{(k)}(x)\varphi_n(x) = o\left(x^q e^{-\frac{x}{2}}\right)$, puis la limite 0, lorsque x tend vers $+\infty$.

Ainsi le « crochet » $[\psi^{(k)}\varphi_n^{(n-k-1)}]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.
Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)\,\mathrm{d}x$ existe et :

$$\langle\psi_m,\psi_n\rangle=(-1)^k\int_0^{+\infty}\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty}\psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

P_{k+1} est donc vraie.
Ainsi P_k est vraie pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. En particulier :

$$\boxed{\langle\psi_m,\psi_n\rangle=(-1)^n\int_0^{+\infty}\psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Soit enfin $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\neq n$. Quitte à utiliser la symétrie du produit scalaire on peut supposer $m<n$.
Dans ce cas, ψ_m étant polynomiale de degré m, $\psi_m^{(n)}$ est nulle et on a : $\langle\psi_m,\psi_n\rangle=0$.
$\boxed{\text{La famille } (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale.}}$

17. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a, d'après la question précédente : $\|\psi_n\|_\alpha^2=(-1)^n\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$.
ψ_n est polynomiale de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$.
On en déduit que, pour tout $x>0$: $\psi_n^{(n)}(x)=(-1)^n n!$. D'où :

$$\boxed{\|\psi_n\|_\alpha^2=(-1)^{2n}n!\int_0^{+\infty}x^{n+\alpha}e^{-x}\,\mathrm{d}x=n!\Gamma(n+\alpha+1).}$$

III. Approximation

18. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\varepsilon_n=\dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}$. Alors la famille $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E_α.
Soit $N\in\mathbb{N}$. La famille $(\varepsilon_n)_{0\leq n\leq N}$ est une base orthonormée de V_N. D'après les questions 6 et 7 on a :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\sum_{k=0}^{N}\langle f_k,\varepsilon_n\rangle^2=\|\pi_N(f_k)\|_\alpha^2=\|f_k\|_\alpha^2-\|f_k-\pi_N(f_k)\|_\alpha^2\leq\|f_k\|_\alpha^2.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\dfrac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ sont majorées, donc cette série converge.
Ainsi : $\boxed{\text{La somme } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \text{ existe.}}$
Pour le calcul de la somme, soit $n\in\mathbb{N}$.
On a : $\langle f_k,\psi_n\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}e^{-kx}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\varphi_n^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$.

f_k étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, les intégrations par parties successives de la question 16 restent valables en remplaçant ψ_m par f_k dans la seconde des intégrales ci-dessus. On récupère donc :

$$\langle f_k,\psi_n\rangle=(-1)^n\int_0^{+\infty}f_k^{(n)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=k^n\int_0^{+\infty}x^{n+\alpha}e^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x.$$

L'application $x\mapsto(k+1)x$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans cet intervalle. Le changement de variable $u=(k+1)x$ permet d'écrire alors :

$$\int_0^{+\infty}x^{n+\alpha}e^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}}e^{-u}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(k+1)^{n+\alpha+1}}.$$

D'où : $\langle f_k,\psi_n\rangle=\dfrac{k^n\Gamma(n+\alpha+1)}{(k+1)^{n+\alpha+1}}$.

Ainsi, d'après la question 17 et la notation de la question 2 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!(k+1)^{2n+2\alpha+2}}=\frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(\frac{k}{k+1}\right)^{2n}.$$

Comme $\dfrac{k}{k+1}\in]-1,1[$ on a, d'après la question 14 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left[1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right]^{\alpha+1}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.$$

Par ailleurs, à l'aide du changement de variable $x\mapsto(2k+1)x=u$, dont les propriétés requises sont immédiates :

$$\|f_k\|_\alpha^2=\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}e^{-2kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\|f_k\|_\alpha^2=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.}$$

19. D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\|f_k\|_\alpha^2$.

    D'après la question 7 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}=\|f_k\|_\alpha^2-\|f_k-\pi_N(f_k)\|_\alpha^2$.

    On en déduit : $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\|f_k-\pi_N(f_k)\|_\alpha=0.}$

20. Soit $\varepsilon>0$.

    Par définition de la limite d'une suite : $\exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall N\in\mathbb{N},\ N\geq N_0\Longrightarrow\|f_k-\pi_N(f_k)\|_\alpha\leq\varepsilon$.

    Soit $p=\pi_{N_0}(f_k)$. On a : $p\in V_{N_0}\subset\mathcal{P}$.

    Ainsi : $\boxed{\text{Il existe } p\in\mathcal{P} \text{ tel que : } \|f_k-p\|_\alpha\leq\varepsilon.}$

21. Soit $\varepsilon > 0$.
La fonction g suggérée est continue sur $]0,1]$.
En effet, elle l'est déjà sur $]0,1]$ puisque $t \mapsto -\ln t$ est continue sur cet intervalle, est à valeurs dans $[0,+\infty[$ et f est continue sur $[0,+\infty[$.
En 0 g est continue puisque : $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = g(0)$.
Soit $\varepsilon_1 > 0$. D'après le résultat admis, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que : $\forall t \in [0,1], \left| g(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k t^k \right| \leq \varepsilon_1$.
L'application $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et elle est à valeurs dans $]0,1]$. On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \right| \leq \varepsilon_1, \text{ puis : } \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq \varepsilon_1^2.$$

D'où :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \mathrm{d}x \leq \varepsilon_1^2\, \Gamma(\alpha+1).$$

Finalement le choix $\varepsilon_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}}$ assure $\boxed{\text{l'existence de } n \in \mathbb{N} \text{ et } (\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \text{ tels que :}}$

$$\boxed{\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.}$$

22. Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la question 21 il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon/2.$$

D'après la question 20, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que : $\|f_f - p_k\|_\alpha \leq \varepsilon_1$, en particulier pour $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\big(1+\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|\big)}$.

Posons $p = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k p_k$. On a alors :

$$\boxed{\|f-p\|_\alpha \leq \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha + \left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (f_k - p_k) \right\|_\alpha \leq \varepsilon/2 + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \varepsilon_1 \leq \varepsilon.}$$

23. Considérons, sur $[0,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$. Il est clair que $f \in E_\alpha$.
Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la question 22 il existe $p_1 \in \mathcal{P}$ tel que : $\|f - p_1\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Or :

$$\|f-p_1\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\left(h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}} - p_1(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^\alpha \left(h(\sqrt{x}) - e^{-\frac{x}{2}}p_1(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x.$$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de $]0,+\infty[$ dans lui-même.
On obtient alors, à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$\|f-p_1\|_\alpha^2 = 2\int_0^{+\infty} u^{2\alpha+1}\left(h(u) - e^{-\frac{u^2}{2}}p_1(u^2)\right)^2 \, \mathrm{d}u.$$

Cette égalité est vraie pour tout $\alpha > -1$, en particulier pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$:

$$\|f-p_1\|_{-\frac{1}{2}}^2 = 2\int_0^{+\infty} \left(h(u) - e^{-\frac{u^2}{2}}p_1(u^2)\right)^2 \, \mathrm{d}u.$$

Soit p la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(u) = p_1(u^2)$.
Alors la fonction $u \mapsto h(u) - e^{-\frac{u^2}{2}}p(u)$ est paire et on a :

$$\|f-p_1\|_{-\frac{1}{2}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - e^{-\frac{u^2}{2}}p(u)\right)^2 \, \mathrm{d}u.$$

Ainsi $\boxed{\text{il existe une fonction polynomiale } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que :}}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - e^{-\frac{u^2}{2}}p(u)\right)^2 \, \mathrm{d}u \leq \varepsilon.}$$