A2018 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.**

**Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.**

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit U un ouvert du plan $\mathbf{R}^2$, soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Son **laplacien** Δf est alors défini sur U par

$$\forall (x,y) \in U \qquad \Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \ .$$

La fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est dite **harmonique** sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et de laplacien nul sur U, i.e. $\Delta f = 0$.

I Noyau de Dirichlet

Pour n entier naturel et t réel, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \ = \ \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} \ .$$

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et t réel non multiple entier de 2π, prouver que
$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot$$

3. Soit $h : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'intégrale
$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\ \sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$
tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \ .$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\, D_n(u)\, \mathrm{d}u \ .$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\, \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u \ ,$$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

On admettra que cette fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

6. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$c_n(g) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \text{ et } c_{-n}(g) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\, e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\, e^{-int} \ .$$

II Coordonnées polaires

Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne canonique. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ harmonique sur U, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $m_0 = (x_0, y_0)$ un point de U, soit $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B(m_0, \delta)$ soit incluse dans U. Pour $(r, t) \in]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$, on pose

$$g(r, t) = f(x_0 + r\cos t \ , \ y_0 + r\sin t) \ .$$

8. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$. Vérifier, sur $]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$, la relation

$$r^2\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\, \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

Cette relation pourra éventuellement être admise pour traiter la suite du problème.

Pour $r \in [0, \delta[$, on pose

$$J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos t\ ,\ y_0 + r\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que l'application J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, \delta[$. Prouver la relation

$$\forall r \in [0, \delta[\qquad r\,J''(r) + J'(r) = 0\ .$$

10. En déduire que l'application J est constante sur $[0, \delta[$.

III Problème de Dirichlet

Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction harmonique à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. On suppose que la fonction f admet un extremum global en un point m_0 de U.

11. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U.

Soit $f : K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré fermé $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, harmonique sur son intérieur $U = \overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, et nulle sur la frontière $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$ de ce carré.

12. Montrer que f est nulle sur K.

Dans la fin de cette section III, on cherche à construire une fonction $f : K \to \mathbf{R}$, avec $K = [0, 2\pi]^2$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1 f est continue sur le carré fermé K ;

2 f est harmonique sur le carré ouvert $\overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[^2$;

3 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 0) = \sin(x)$;

4 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 2\pi) = 0$;

5 $\forall y \in [0, 2\pi], \quad f(0, y) = f(2\pi, y) = 0.$

13. Construire une fonction f_0 vérifiant ces conditions et qui soit de la forme $f_0(x, y) = \varphi(x)\, \psi(y)$, où φ et ψ sont deux fonctions continues de l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers $\mathbf{R}$. Montrer ensuite que cette fonction f_0 est l'unique solution du problème posé.

IV Développement en série

Soit $f : D(0, R) \to \mathbf{C}$ harmonique, où $D(0, R)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon R, avec $R \in]0, +\infty]$. On posera $D(0, +\infty) = \mathbf{R}^2$. Pour $r \in [0, R[$ et n entier relatif, on pose

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t \ .$$

14. En utilisant les calculs faits dans la question 8, montrer que la fonction v_n est solution sur $[0, R[$ de l'équation différentielle

$$(E_n) : \quad r^2\, v_n''(r) + r\, v_n'(r) - n^2\, v_n(r) = 0 \ .$$

15. Résoudre l'équation (E_n) sur $]0, R[$ en utilisant le changement de variable $r = e^s$.

16. En déduire, pour tout n entier relatif, l'existence d'un coefficient complexe a_n tel que l'on ait $v_n(r) = a_n\, r^{|n|}$ sur $[0, R[$.

17. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(r\, e^{it}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(r\, e^{-it}\right)^n .$$

18. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction harmonique bornée sur $\mathbf{R}^2$. Montrer que f est constante.

V Théorème de D'Alembert-Gauss

Dans cette dernière partie, on considère un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, supposé non constant. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = P(x + iy) .$$

19. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ à l'aide des polynômes dérivés P' et P''. Montrer que la fonction f est harmonique sur $\mathbf{R}^2$.

20. Soit U un ouvert du plan sur lequel f ne s'annule pas. Montrer que la fonction $g = 1/f$ est harmonique sur U.

21. Montrer qu'il existe un réel positif A tel que, pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq A$, on ait $\left|P(z)\right| \geq 1$.

22. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss dont on rappellera l'énoncé précis.

Fin du problème