Concours communs Mines et Ponts

Correction de l'épreuve PC ; 2018

Olivier HALGAND
olivier.halgand@ac-lyon.fr

I Noyau de Dirichlet

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-ikt}\right) \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{e}^{ikt} + \mathrm{e}^{-ikt}\right) \mathrm{d}t,$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 2\pi + 2\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi},$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi.}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Alors, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique on a :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\mathrm{e}^{it}\right)^k = \mathrm{e}^{-int}\ \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{it}\right)^{2n+1}}{1 - \mathrm{e}^{it}}.$$

En utilisant « l'angle moitié », on obtient :

$$D_n(t) = \mathrm{e}^{-int}\ \frac{\mathrm{e}^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\left(\mathrm{e}^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - \mathrm{e}^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\right)} = \frac{-2i\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{-2i\sin\frac{t}{2}},$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}.}$$

3. Puisque les fonctions h et $u \mapsto \sin(\alpha u)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut effectuer une intégration par parties, ce qui donne :

$$I_\alpha = \left[h(u)\,\frac{-\cos(\alpha u)}{\alpha}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\,\frac{-\cos(\alpha u)}{\alpha}\,\mathrm{d}u = \frac{\cos(\alpha\pi)}{\alpha}\Big(h(-\pi) - h(\pi)\Big) + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\cos(\alpha u)\,\mathrm{d}u.$$

Or, on a d'une part :

$$\left|\frac{\cos(\alpha\pi)}{\alpha}\Big(h(-\pi) - h(\pi)\Big)\right| \leqslant \frac{|h(-\pi) - h(\pi)|}{\alpha} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et, d'autre part, h' étant continue sur $[-\pi, \pi]$: $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in [-\pi, \pi],\ |h'(u)| \leqslant M$. On a donc :

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\cos(\alpha u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} |h'(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{2M\pi}{\alpha} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = 0.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ik(t-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Effectuons le changement de variable (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) : $u = t - x$, ce qui donne :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} g(t-u)\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{iku}\,\big(-\,\mathrm{d}u\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(t-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

Or, les fonctions g et D_n sont 2π-périodiques, donc (pour tout $t \in \mathbb{R}$) il en est de même de la fonction $u \mapsto g(t-u)D_n(u)$, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\qquad \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u.}$$

5. Puisque, d'après **1.**, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi}\,g(t)\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(g(t-u)-g(t)\Big)D_n(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Posons alors, pour $u \neq 0$: $h_t(u) = \dfrac{g(t-u)-g(t)}{\sin\frac{u}{2}}$, et $h_t(0) = -2g'(t)$. Puisque :

$$\frac{g(t-u)-g(t)}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{g(t-u)-g(t)}{-u}\cdot\frac{-u}{\sin\frac{u}{2}} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} g'(t)\cdot(-2) = -2g'(t),$$

alors h_t est continue en 0, et donc sur $[-\pi, \pi]$. De plus :

$$\forall u \in [-\pi, \pi],\quad \sin\frac{u}{2}\cdot D_n(u) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right).$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\mathrm{d}u, \text{ où } h_t \text{ est continue sur } [-\pi,\pi].}$$

6. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Puisque les fonctions g et $x \mapsto \mathrm{e}^{-inx}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut effectuer une double intégration par parties, ce qui donne, puisque g, et donc g', sont 2π-périodiques :

$$\begin{aligned}c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[g(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n\Big(g(\pi)-g(-\pi)\Big) - \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{-i}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-i}{2\pi n}\left(\left[g'(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n\Big(g'(\pi)-g'(-\pi)\Big) - \int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{-1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \left|c_n(g)\right| = \frac{1}{2\pi n^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g''(x)\right|\mathrm{d}x,$$

et comme g'' est continue sur $[-\pi,\pi]$: $\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [-\pi,\pi],\ \left|g''(x)\right| \leqslant A$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \left|c_n(g)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} A\,\mathrm{d}x = \frac{A}{n^2}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty, \text{ on a : } c_n(g) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } c_{-n}(g) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

7. Puisque la fonction h_t de la question **5.** est supposée de classe $\mathscr{C}^1$, d'après **3.** on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\,\mathrm{d}u = 0,$$

c'est-à-dire, d'après **5.** :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} - g(t)\right) = 0,$$

ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(g)\,\mathrm{e}^{-ikt}\right) = g(t).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{ikt}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|c_k(g)\right| \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} c_{-k}(g)\,\mathrm{e}^{-ikt}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|c_{-k}(g)\right|,$$

et d'après **6.**, $c_k(g) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $c_{-k}(g) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, ce qui implique que les séries $\sum c_n(g)$ et $\sum c_{-n}(g)$ sont absolument convergentes, donc convergentes. Il s'ensuit que les séries $\sum c_n(g)\,\mathrm{e}^{int}$ et $\sum c_{-n}(g)\,\mathrm{e}^{-int}$ convergent, et on peut donc écrire l'égalité :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\,\mathrm{e}^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\,\mathrm{e}^{-int}.}$$

II Coordonnées polaires

8. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\varphi : (r,t) \in]-\delta,\delta[\times \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\delta,\delta[\times \mathbb{R}$, donc, par composition,

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On a donc (en notant φ_1 et φ_2 les applications partielles de φ) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(r,t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(r,t)\big) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(r,t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(r,t)\big)\\ &= -r\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(r,t)\big) + r\cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(r,t)\big),\end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) = \cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(r,t)\big) + \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(r,t)\big).$$

On en tire, d'après le théorème de Schwarz, en omettant les $\varphi(r,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t) &= -r\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin t\left(-r\sin t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&\quad - r\sin t\,\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos t\left(-r\sin t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\
&= -r\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin t\,\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t) &= \cos t\left(\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + \sin t\left(\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\
&= \cos^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
r^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= r\left(\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + r^2\left(\cos^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&\quad - r\left(\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + r^2\left(\sin^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&= r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).
\end{aligned}$$

Or, puisque f est harmonique par hypothèse, on a $\Delta f = 0$, et donc :

$$\boxed{r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.}$$

9. Puisque g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$, on en déduit que J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\delta,\delta[$, donc en particulier :

$$\boxed{J \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [0,\delta].}$$

De plus, pour tout $r\in[0,\delta[$, on a :

$$J'(r) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t \quad\text{ et }\quad J''(r) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que, pour tout $r\in\,]0,\delta[$:

$$\begin{aligned}
rJ''(r) + J'(r) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_{t=-\pi}^{t=\pi}\\
&= -\frac{1}{r}\left[-r\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r\cos t, y_0 - r\sin t) + r\cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r\cos t, y_0 - r\sin t)\right]_{t=-\pi}^{t=\pi}\\
&= -\frac{1}{r}\left(-r\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r, y_0) + r\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r, y_0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Par continuité de J' et J'', l'égalité est encore vraie pour $r=0$ et donc :

$$\boxed{\forall r\in[0,\delta[,\ rJ''(r) + J'(r) = 0.}$$

10. Ainsi, la fonction J est solution, sur $]0,\delta[$, de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{r}\,y = 0$. On en déduit donc tout d'abord que :

$$\exists K\in\mathbb{R},\ \forall r\in\,]0,\delta[,\ J'(r) = K\,\mathrm{e}^{-\ln r} = \frac{K}{r},$$

et ensuite :

$$\exists (K,K')\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]0,\delta[,\ J(r) = K\ln r + K'.$$

Or, on sait que J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\delta[$, donc $K=0$ et donc

$$\boxed{J \text{ est constante sur } [0,\delta[.}$$

III Problème de Dirichlet

11. Supposons qu'il existe une boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U sur laquelle f ne soit pas constante. Alors, il existe $r \in]0, \delta[$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que : $f(x_0, y_0) > f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$. Donc, par stricte croissance de l'intégrale (les fonctions considérées étant continues) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}t > \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit :} \quad J(0) > J(r),$$

ce qui contredit le fait que J est constante sur $]0, \delta[$ (d'après **II.10.**). Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante sur toute boule ouverte centrée en } m_0 \text{ et incluse dans } U.}$$

12. Puisque f est continue sur le compact K, elle est bornée et atteint ses bornes. Considérons alors $M = \max\limits_{x \in K} f(x)$ et $m = \min\limits_{x \in K} f(x)$. Si $m = M$, alors f est constante sur K et donc nulle.

Supposons donc $m \neq M$ et, quitte à considérer $-f$, on peut supposer $M > 0$. Alors, f admet un maximum global en un point $m_0 \in \overset{\circ}{K}$. D'après **III.11.**, cela implique que f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans $\overset{\circ}{K}$. En particulier, si δ est la distance de m_0 à $Fr(K)$, f est constante sur la boule $\mathscr{B}$ de centre m_0 et de rayon δ. Mais alors, par continuité de f sur K, on en déduit que f est nulle sur $\mathscr{B}$, ce qui contredit le choix de M.

On peut donc en conclure que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est nulle sur } K.}$$

13. On cherche une fonction f_0 telle qu'il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in K,\ f(x,) = \varphi(x)\psi(y)$.

- D'après la condition **2**, f_0 est harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, et donc :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = 0 \quad \text{soit :} \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{K},\ \varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0.$$

- D'après la condition **3**,

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f_0(x, 0) = \sin x \quad \text{donc :} \quad \varphi(x)\psi(0) = \sin x.$$

- D'après la condition **4**,

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f_0(x, 2\pi) = 0 \quad \text{donc :} \quad \varphi(x)\psi(2\pi) = 0.$$

- D'après la condition **5**,

$$\forall y \in [0, 2\pi], \quad f_0(0, y) = f_0(2\pi, y) = 0 \quad \text{donc :} \quad \varphi(0)\psi(y) = \varphi(2\pi)\psi(y) = 0.$$

La condition **3** suggère de poser : $\forall x \in [0, 2\pi],\ \varphi(x) = \sin x$, de sorte que la condition **5** est vérifiée, et on doit alors avoir : $\psi(0) = 1$ et $\psi(2\pi) = 0$. La condition **2** s'écrit donc :

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{K}, \quad -\sin x\psi(y) + \sin x\psi''(y) = 0,$$

et donc :

$$\forall y \in]0, 2\pi[, \quad \psi''(y) - \psi(y) = 0.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes a et b telles que : $\forall i \in [0, 2\pi],\ \psi(y) = a\,\mathrm{e}^{y} + b\,\mathrm{e}^{-y}$. Puisque $\psi(0) = 1$ et $\psi(2\pi) = 0$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \mathrm{e}^{2\pi} a + \mathrm{e}^{-2\pi} b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) a = -\mathrm{e}^{-2\pi} \\ \left(\mathrm{e}^{2\pi} + \mathrm{e}^{-2\pi}\right) b = \mathrm{e}^{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} = \frac{-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\,\mathrm{sh}(2\pi)} \\ b = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{2\,\mathrm{sh}(2\pi)} \end{cases}.$$

On doit donc avoir :

$$\forall y \in [0, 2\pi], \quad \psi(y) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi)}\Big(-\mathrm{e}^{-2\pi}\,\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{2\pi}\,\mathrm{e}^{-y}\Big) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi)}\Big(-\mathrm{e}^{-(2\pi-y)} + \mathrm{e}^{2\pi-y}\Big) = \frac{\operatorname{sh}(2\pi-y)}{\operatorname{sh}(2\pi)}.$$

On en déduit donc, en utilisant la condition **1** :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{K}, \quad f_0(x,y) = \varphi(x)\psi(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(2\pi)} \sin x \, \operatorname{sh}(2\pi - y).}$$

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant aux cinq conditions. Alors, la fonction $f - f_0 : K \to \mathbb{R}$ est continue sur K, harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, et nulle sur la frontière $Fr(K)$. Donc, d'après **III.12.**, $f - f_0$ est nulle sur K, c'est-à-dire $f = f_0$. Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ est l'unique solution du problème posé.}}$$

IV Développement en série

14. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, il en est de même de v_n. Pour tout $r \in [0, R[$ et avec $g : (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$, on a donc :

$$v_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Donc, d'après **II.8.** :

$$\begin{aligned}
r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t - \frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t - \frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or, avec deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
n^2\int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{n}{i}\,\mathrm{e}^{-int}\,g(r,t)\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n}{i}\,\mathrm{e}^{-int}\,\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\,\mathrm{d}t \\
&= ni(-1)^n\Big(\underbrace{g(r,\pi) - g(r,-\pi)}_{=0}\Big) - i\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-int}}{-i}\,\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-int}}{-i}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= (-1)^n\Big(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}(r,\pi) - \frac{\partial g}{\partial t}(r,-\pi)}_{=0}\Big) - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la fonction } v_n \text{ est solution de l'équation différentielle : } r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0.}$$

15. On résout l'équation sur $]0, R[$ en posant le changement de variable : $r = \mathrm{e}^s$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_n}{\partial s}(\mathrm{e}^s) = \mathrm{e}^s\,\frac{\partial v_n}{\partial r}(r) = r\,\frac{\partial v_n}{\partial r}(r), \\
\text{et} \quad &\frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2}(\mathrm{e}^s) = \mathrm{e}^s\,\frac{\partial v_n}{\partial r}(r) + \mathrm{e}^{2s}\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(r) = r\,\frac{\partial v_n}{\partial r}(r) + r^2\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(r).
\end{aligned}$$

L'équation différentielle devient donc :

$$v_n''(\mathrm{e}^s) - n^2 v_n(\mathrm{e}^s) = 0.$$

Ainsi, la fonction $v_n \circ \exp$ est solution de l'équation différentielle : $y'' - n^2 y = 0$ dont les solutions sont les fonctions : $y : s \mapsto \alpha_n \mathrm{e}^{ns} + \beta_n \mathrm{e}^{-ns} = \alpha_n (\mathrm{e}^s)^n + \beta_n (\mathrm{e}^s)^{-n}$ avec $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les solutions de l'équation différentielle } (E_n) \text{ sont les fonctions} \\ v_n : r \mapsto \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}, \text{ avec } (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2.\end{array}}$$

16. On effectue une disjonction de cas :

- si $n = 0$, alors v_0 est constante, donc : $\exists a_n \in \mathbb{R},\ \forall r \in [0, R[,\ v_0(r) = a_0$;
- si $n > 0$, alors puisque v_n est continue sur $[0, R[$, on a nécessairement $\beta_n = 0$ et donc : $\exists a_n \in \mathbb{R},\ \forall r \in [\![0, R[\![,\ v_n(r) = a_n r^n$;
- si $n < 0$, alors puisque v_n est continue sur $[0, R[$, on a nécessairement $\alpha_n = 0$ et donc : $\exists a_n \in \mathbb{R},\ \forall r \in [0, R[,\ v_n(r) = a_n r^{-n}$.

Dans tous les cas :

$$\boxed{\exists a_n \in \mathbb{R},\ \forall r \in [\![0, R[\![,\ v_n(r) = a_n r^{|n|}.}$$

17. Soient $r \in [0, R[$, $t \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $g_r : t \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$. Alors g_r est est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et, avec les notations de la partie **I** :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = v_n(r) = a_n r^{|n|}.$$

Donc, d'après **I.7.** :

$$g_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\,\mathrm{e}^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\,\mathrm{e}^{-int},$$

soit :

$$f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\,\mathrm{e}^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} r^n\,\mathrm{e}^{-int},$$

ou encore :

$$\boxed{f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(r\,\mathrm{e}^{it}\big)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\big(r\,\mathrm{e}^{-it}\big)^n.}$$

18. Soit f une fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'après la partie **IV.**, il existe des coefficients complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(r\,\mathrm{e}^{it}\big)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\big(r\,\mathrm{e}^{-it}\big)^n.$$

Or, puisque f est bornée sur $\mathbb{R}^2$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \big|f(r\cos t, r\sin t)\big| \leqslant M,$$

ce qui implique que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = a_{-n} = 0$ et donc que f est constante.

$$\boxed{\text{toute fonction harmonique et bornée sur } \mathbb{R}^2 \text{ est constante.}}$$

V Théorème de D'Alembert-Gauss

19. D'après les hypothèses, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P'(x+iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\,P'(x+iy),}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = P''(x+iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -P''(x+iy).}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\boxed{f \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2.}$$

20. Puisque f ne s'annule pas sur U, on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et, pour tout $(x,y) \in U$, on a d'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f^2(x,y)} \quad \text{donc :} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot f^2(x,y) - 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 \cdot f(x,y)}{f^4(x,y)},$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f^2(x,y)} \quad \text{donc :} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot f^2(x,y) - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 \cdot f(x,y)}{f^4(x,y)}.$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) = -\frac{1}{f^2(x,y)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) - \frac{2}{f^3(x,y)}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)(x,y),$$

avec :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{car } f \text{est harmonique,}$$

et :

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)(x,y) = \Big(P(x+iy)\Big)^2 + \Big(i\,P'(x+iy)\Big)^2 = 0.$$

Finalement,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0,$$

et donc :

$$\boxed{g \text{ est harmonique sur } U.}$$

21. Écrivons : $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} \lambda_n X^n$ où d est le degré de P. Puisque P n'est pas constant, on a : $d \geqslant 1$. On en déduit que : $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} \big|P(z)\big| = +\infty$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant A \ \Rightarrow\ \big|P(z)\big| \geqslant 1.}$$

22. Le théorème de D'Alembert-Gauss s'énonce ainsi :

$$\boxed{\textit{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \textit{ admet au moins une racine complexe.}}$$

Considérons donc un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, et supposons qu'il ne possède pas de racine dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant A \ \Rightarrow\ \big|P(z)\big| \geqslant 1.$$

On note $\mathscr{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon A.

Par hypothèse, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $f(x,y) = P(x+iy)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après **V.19.**, est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Considérons alors la fonction $g = \dfrac{1}{f}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, d'après **V.20.**, g est aussi harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Mais, d'une part, g est bornée sur le compact $\mathscr{B}$ et, d'autre part :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2} \geqslant A \ \Rightarrow\ \big|g(x,y)\big| = \left|\frac{1}{f(x,y)}\right| \leqslant 1,$$

c'est-à-dire que g est bornée par 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathscr{B}$. Finalement, g est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Mais alors, d'après **IV.18.**, g est constante, donc f et P aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il s'ensuit que P possède au moins une racine complexe, et le théorème de D'Alembert-Gauss est démontré !