

I. Exponentielle tronquée

1. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. $\frac{(nx)^k}{k!} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum \frac{(nx)^k}{k!}$ converge et le reste d'ordre n est bien défini. De plus, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}$.

Pour tout $x > 0$, $R_n(x)$ est bien défini, et $T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}$.

2. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{nt}$. f est de classe \mathcal{C}^∞ et $f^{(k)}(t) = n^k e^{nt}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. En particulier, f est \mathcal{C}^{n+1} donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre n :

$$\underbrace{f(x)}_{=e^{nx}} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n dt = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} x^k}_{=T_n(x)} + \int_0^x \frac{n^{n+1} e^{nt}}{n!} (x-t)^n dt$$

D'où : $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x e^{nt} (x-t)^n dt$

On effectue le changement de variable $u = x - t$ qui est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme :

$$\int_0^x e^{nt} (x-t)^n dt = \int_x^0 e^{n(x-u)} u^n (-du) = e^{nx} \int_0^x (ue^{-u})^n du$$

$\forall x > 0, \quad R_n(x) = \frac{n^{n+1} e^{nx}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n+1} y^n} = y \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = ye^{\underbrace{\frac{(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n})}{n}}_{\substack{\sim \frac{n+1}{n} \sim 1 \\ \rightarrow e^1}}}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye$

Si $y < e^{-1}$, alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha$ avec $|\alpha| < 1$. Dans ce cas, d'après le critère d'Alembert, la série $\sum a_n$ converge. Et si elle converge, alors nécessairement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Si $y < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

4. La fonction $h : u \mapsto ue^{-u}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+ et de dérivée $h'(u) = (1-u)e^{-u}$. Cette dérivée ne s'annule qu'en 1 et est positive sur $[0; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$. Donc h est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Pour tout $u \in [0, x]$, $h(u) \leq h(x)$. En posant $M := h(x)$, on voit que M est un maximum de la fonction h sur $[0, x]$. De plus, $M = h(x) < h(1) = e^{-1}$.

La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet sur $[0, x]$ un maximum M tel que $M < e^{-1}$.

D'après ce que l'on vient de dire, $\int_0^x (ue^{-u})^n du \leq xM^n$ d'où :

$|R_n(x)| \leq e^{nx} x a_n$ où $a_n = \frac{n^{n+1} M^n}{n!}$. Comme $M < e^{-1}$, $x a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $R_n(x) = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0; 1[, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

On rappelle que $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x)$ d'où $T_n(x) - e^{nx} = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0; 1[, \quad T_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{nx}}$$

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Initialisation :

$$\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

La propriété est donc vraie au rang initial.

Hérédité :

Considérons un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Alors $n! \stackrel{\text{IPP}}{=} \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} dt$ d'où $(n+1)n! = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$ ce

qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}$$

6. Montrons tout d'abord que $\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du \frac{n^{n+1}}{n!} = 1$.

Par le changement de variable $nu = t$, on a : $\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{1}{n^{n+1}} \cdot n!$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - \int_0^x (ue^{-u})^n du \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du}$$

7. Si $x > 1$ alors, comme f est décroissante sur $[x, +\infty[$, $ue^{-u} \leq xe^{-x}$. En intégrant l'inégalité $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ entre x et $+\infty$ on obtient $\frac{R_n(x)}{e^{nx}} \leq \frac{n^{n+1} y^n}{n!} M$ avec $y = xe^{-x} < e^{-1}$

et $M = (xe^{-x})^{-1} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du$. Donc $\frac{R_n(x)}{e^{nx}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

$$\boxed{\text{Si } x > 1, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

II. Méthode de Laplace

8. Supposons que $f'(0) \neq 0$. Alors $f(x) - 1 \sim x f'(0)$ au voisinage de 0. Or le terme de gauche est toujours strictement négatif d'après (H3), tandis que le terme de droite change de signe strictement en 0. C'est absurde.

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

On écrit $f(x) = 1 + g(x)$ avec $g(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1 + g(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x^2} g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}$$

9. Supposons que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ n'est égal à 0. Alors, on peut prolonger φ par continuité sur le segment $[-1; 1]$ en posant $\varphi(\pm 1) = -\ln(f(\pm 1))$. φ admet donc un minimum sur $[-1; 1]$. Ce minimum -notons le a - est strictement positif puisque φ est elle-même strictement positive sur $[-1; 1]$. En particulier, φ minorée sur $] - 1; 1[$ par a .

Si $f(-1)$ ou $f(1)$ est nul. Supposons par exemple que $f(1) = 0$. Alors φ diverge vers $+\infty$ en 1. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\varphi \geq 1$ sur $[1 - \epsilon; 1[$. Par ailleurs, φ est continue sur $[0; 1 - \epsilon]$, elle y admet donc un minimum $m_1 > 0$. φ est minorée par $a_1 := \min(m_1; 1)$ sur $[0; 1[$.

De même en -1 si $f(-1) \neq 0$. Si $f(-1) = 0$, on est ramené au cas précédent. Dans tous les cas, φ admet un minorant $a_2 > 0$ sur $] - 1; 1]$.

On prend $a := \min(a_1; a_2)$. Soit $x \in] - 1; 1[$. $-\frac{1}{x^2} \ln(f(x)) \geq a \Rightarrow f(x) \leq e^{-ax^2}$. Par continuité des fonctions f et $x \mapsto e^{-ax^2}$ en -1 et 1 , cette inégalité reste vraie pour $x = \pm 1$.

La fonction φ est minorée par un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1; 1]$, on ait : $f(x) \leq e^{-ax^2}$.

10. La fonction g_n est continue sur $[-\sqrt{n}; \sqrt{n}]$ en tant que composée de fonctions continues. Elle est trivialement continue sur $] - \infty; -\sqrt{n}[$ et sur $[\sqrt{n}; +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Soit $u \in \mathbb{R}$. A partir d'un certain rang, $u \in [-\sqrt{n}; \sqrt{n}]$ donc :

$$g_n(u) = \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = e^{n \ln\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-u^2 \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)} \text{ APCR. Or } \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(0) = \frac{1}{2}.$$

Donc $g_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

La suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$.

11. Posons $I_n := \int_{-1}^1 (f(x))^n dx$. On effectue le changement de variable $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$:

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \frac{du}{\sqrt{n}} \text{ d'où } \sqrt{n} I_n = \int_{\mathbb{R}} g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{TCD} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}. \text{ Il reste à justifier l'utilisation du Théorème de Convergence Dominée :}$$

i) (g_n) est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers une fonction g également continue par morceaux.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$, $|g_n(u)| \leq g(u) = e^{-au^2}$. L'inégalité est claire si $u \in] - \infty; -\sqrt{n}[\cup] \sqrt{n}; +\infty[$.

Si non, $\frac{u}{\sqrt{n}} \in [-1; 1]$ et dans ce cas, on dispose de l'inégalité $f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \leq e^{-a\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}$ qui élevée à la puissance n nous donne $g_n(u) \leq e^{-au^2}$.

iii) g est une fonction positive et intégrable sur \mathbb{R} (car $a > 0$).

$$\boxed{\int_{-1}^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

III. Formule de Stirling

12. Partons du membre de droite : $e^{-n}(I_n + J_n) = \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^n e^{-n(x+1)} dx \stackrel{u=n(x+1)}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u} \frac{du}{n} = \frac{n!}{n^{n+1}}$
d'après la question 5.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n)$$

13. On pose $h : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2^x - x - 1$. h est de classe \mathcal{C}^2 et $h'(x) = (\ln 2)2^x - 1$ et $h''(x) = (\ln 2)^2 2^x \geq 0$. Donc h' est croissante. Or $h'(1) = 2 \ln 2 - 1 \geq 0$. Donc h' est positive d'où h est croissante : pour tout $x \geq 1$, $h(x) \geq h(1) = 0$ i.e. $2^x - x - 1 \geq 0$.

$$\text{Pour tout } x \geq 1, \quad x + 1 \leq 2^x.$$

$$\text{D'après ce qui précède, } J_n \leq \int_1^{+\infty} (2^x)^n e^{-nx} dx = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2 - 1)x} dx = \left[\frac{e^{n(\ln 2 - 1)x}}{n(\ln 2 - 1)} \right]_1^{+\infty}.$$

$$\text{D'où } J_n \leq \frac{e^{n(\ln 2 - 1)}}{n(1 - \ln 2)} \leq \frac{1}{n(1 - \ln 2)}.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, J_n \leq \frac{C}{n} \text{ où } C = \frac{1}{1 - \ln 2}.$$

14. On pose $f(x) = (1+x)e^{-x}$ de sorte que $I_n = \int_{-1}^1 (f(x))^n dx$. f est de classe \mathcal{C}^2 .

(H1) $f(0) = 1$ est clair.

(H2) $f''(x) = (-1+x)e^{-x}$ donc on a bien $f''(0) = -1$.

(H3) Soit $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$. On a bien $f(x) > 0$. D'autre part, l'inégalité de convexité de l'exponentielle s'écrit $e^x \geq x + 1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en 0) d'où $f(x) = (1+x)e^{-x} < 1$.

(H4) $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1}$. Sachant que $e \approx 2,67$, on a bien $f(-1), f(1) \in [0; 1]$.

D'après la question 11 :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

15. D'après les questions précédentes, $J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $I_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $J_n = o(I_n)$ et $I_n + J_n \sim I_n$.

On a alors $n! \sim n^{n+1} e^{-n} I_n \sim n^{n+1} e^{-n} \sqrt{2\pi n}^{-\frac{1}{2}}$ d'où :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

IV. Formule de Bernstein

16. La question 2 nous donne $R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n e^{(1-u)n} du \stackrel{t=1-u}{=} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^0 (1-t)^n e^{nt} (-dt) :$

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt$$

17. On identifie l'intégrale ci-dessus comme étant $\int_0^1 (f(-t))^n dt$ où f est la fonction introduite à la question 14. On vérifie sans peine que la fonction $t \mapsto f(-t)$ vérifie les mêmes hypothèses que f . La question 11 nous donne un équivalent de cette intégrale quand $n \rightarrow +\infty$.

$$R_n(1) \sim \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n} n^{\frac{1}{2}} e^{-n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{e^n}{2}.$$

$$R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$

Comme $T_n(1) + R_n(1) = e^{1 \cdot n}$ d'après la question 1, $T_n(1) = e^n - \frac{e^n}{2} - o\left(\frac{e^n}{2}\right) = \frac{e^n}{2} + o\left(\frac{e^n}{2}\right)$.

$$T_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$

V. Première répétition

18. Je propose le code suivant :

```
def X(liste):

M=[liste[0]]
i=1
while liste[i] not in M: % on teste si l'élément regardé a déjà été enregistré
    M.append(liste[i]) % comme appartenant à la liste.
    i=i+1
return i+1 % car les listes en python sont indicées à partir de 0.
```

19. $P(X = k) = \frac{A_k}{\text{Card}(\Omega)}$ où $A_k = \text{Card}(X^{-1}(\{k\}))$ puisque le tirage d'un élément w de Ω est uniforme (ceci vient du fait que les VAD U_j sont uniformes et indépendantes). Pour que $P(X = k) \neq 0$, il suffit que $X^{-1}(\{k\})$ soit non vide. $w = (1, 2, \dots, k-1, 1, 1, \dots, 1)$ est tel que $X(w) = k$ donc :

$$\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, \quad P(X = k) \neq 0$$

20. Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. $(\{X > k\}, \{X \leq k\})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1|X > k)P(X > k) + P(X > k+1|X \leq k)P(X \leq k)$$

Or $P(X > k+1|X \leq k) = 0$ d'où :

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad P(X > k+1) = P(X > k+1|X > k)P(X > k)$$

21. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Comme $P(X = i)$ est non nul pour $i = 1, \dots, k-1$:

$$P(X > k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{P(X > i+1)}{P(X > i)}. P(X > 1) = \prod_{i=1}^{k-1} P(X > i+1|X > i)1.$$

Or $P(X > i+1|X > i)$ est la probabilité que le $i+1$ -ème élément est différent des i premiers sachant que ceux-ci sont distincts deux à deux. Le $i+1$ -ème élément peut donc prendre $n-i$ valeurs possible, et comme U_{i+1} est uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$: $P(X > i+1|X > i) = \frac{n-i}{n}$.

$$P(X > k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$$

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X > k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$$

22. Pour des facilités de calculs, on considère que la v.a. X peut prendre la valeur 1 avec une probabilité nulle.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^k P(X = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=i}^{n+1} P(X = k) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X \geq i) = \sum_{i=0}^n P(X > i).$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n P(X > k)$$

$$23. E(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^n(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{n^n} T_n(1).$$

Or d'après la question 17, $T_n(1) \sim \frac{e^n}{2}$ d'où $E(X) \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{e^n}{2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ d'où :

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$

*** Fin de la correction ***