

**I Préliminaires**

1.  $F_2(\lambda) = 1 + 2\lambda$  et  $L_2(\lambda) = (1 + 2\lambda)^2 + 2(1 - \lambda - \lambda^2) = 3 + 2\lambda + 2\lambda^2$ .

2. Si  $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $J^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}I$  quand  $a + d = 0$  et  $a^2 + bc = \frac{5}{4}$ .

On peut prendre par exemple  $a = d = 0$ ,  $b$  non nul et  $c = \frac{5}{4b}$ , on obtient une infinité de matrices qui vérifient c).

3. Supposons  $\alpha I + \beta J = 0$ . Si  $\beta \neq 0$ , on déduit que  $J$  est multiple de  $I$ : contradiction.

Donc  $\beta = 0$  d'où  $\alpha I = 0$ , d'où  $\alpha = 0$ : la famille  $(I, J)$  est libre.

Contrairement à ce qui est écrit, la matrice  $J$  n'est pas quelconque vérifiant  $J^2 = \frac{5}{4}I$ .

Elle doit vérifier aussi:  $J$  n'est pas multiple de  $I$ , donc la famille  $(I, J)$  est libre.

**II Formule de Moivre généralisée**

4.  $(X + \lambda + \frac{1}{2})^2 = X^2 + (2\lambda + 1)X + (\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}) = (X^2 - \frac{5}{4}) + (2\lambda + 1)X + (\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2})$ .

On peut donc prendre  $Q(X) = 1$  et  $T(X) = (2\lambda + 1)X + (\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2})$ .

5.  $R(\lambda)^2 = J^2 + (2\lambda + 1)J + (\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4})I = (2\lambda + 1)J + (\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2})I$ .

$R(\lambda)^2 = (2\lambda + 1)R(\lambda) - (2\lambda + 1)(\lambda + \frac{1}{2})I + (\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2})I = (2\lambda + 1)R(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)I$ .

6. De  $R(\lambda)(R(\lambda) - (2\lambda + 1)I) = (1 - \lambda - \lambda^2)I$  on déduit, puisque  $1 - \lambda - \lambda^2 \neq 0$ , que  $R(\lambda)$  est inversible et a pour inverse  $\frac{1}{1 - \lambda - \lambda^2}(R(\lambda) - (2\lambda + 1)I) = \frac{1}{1 - \lambda - \lambda^2}(J - (\lambda + \frac{1}{2})I)$  qui est bien le résultat demandé.

7. D'après (7),  $F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I = R(\lambda)^{n+1} = R(\lambda)^n R(\lambda) = (F_n(\lambda)J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)I)(J + (\lambda + \frac{1}{2})I) = F_n(\lambda)J^2 + (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda + \frac{1}{2})F_n(\lambda))J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda + \frac{1}{2})I$ .

Avec  $J^2 = \frac{5}{4}I$  on obtient  $F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I = (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda + \frac{1}{2})F_n(\lambda))J + (\frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4}F_n(\lambda))I$ .

Comme la famille  $(I, J)$  est libre on déduit:  $F_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda + \frac{1}{2})F_n(\lambda)$  et  $\frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4}F_n(\lambda)$ . En utilisant  $F_1(\lambda) = 1$  et  $L_1(\lambda) = 2\lambda + 1$  on obtient bien:

$2F_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_1(\lambda)F_n(\lambda)$  et  $2L_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)L_1(\lambda) + 5F_n(\lambda)F_1(\lambda)$ .

8. Démontrons la formule de Moivre pour les entiers négatifs  $-n$  par récurrence sur  $n$ . D'après (3),(4) et (9), elle est valable pour  $-n = -1$ . Supposons la vraie pour un entier  $-n \leq -1$  et montrons qu'elle est vraie pour  $-(n+1)$ . Avec (3),(4), (7) et (9):

$$R(\lambda)^{-n-1} = \frac{1}{(\lambda^2 + \lambda - 1)^{n+1}}(-F_n(\lambda)J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)I)(-J + \frac{1}{2}L_1(\lambda)I).$$

Puis  $R(\lambda)^{-n-1} = \frac{1}{(\lambda^2 + \lambda - 1)^{n+1}}(F_n(\lambda)J^2 - (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + \frac{1}{2}L_1(\lambda)F_n(\lambda))J + \frac{1}{4}L_1(\lambda)L_n(\lambda)I)$ .

Avec  $J^2 = \frac{5}{4}I$  et (10) on peut remplacer  $\frac{1}{2}L_n(\lambda) + \frac{1}{2}L_1(\lambda)F_n(\lambda)$  par  $F_{n+1}(\lambda)$  ainsi que  $\frac{1}{4}L_1(\lambda)L_n(\lambda) + \frac{5}{4}F_n(\lambda)$  par  $\frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)$ .

On obtient finalement avec (3) et (4):  $R(\lambda)^{-n-1} = F_{-n-1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{-n-1}(\lambda)I$ .

La formule de Moivre est démontrée pour les entiers négatifs.

**III Quelques identités remarquables**

9. Avec (9),  $R(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)R(\lambda)^{-1} = 2J$  donc  $R(\lambda)^2 + (1 - \lambda - \lambda^2)I = 2JR(\lambda)$ .

10. En multipliant cette dernière égalité par  $R(\lambda)^{-2}$  on obtient  $I - W(\lambda) = 2JR(\lambda)^{-1}$ .

Comme  $J^{-1} = \frac{4}{5}J$  et puisque  $R(\lambda)$  et  $J$  commutent on obtient  $(I - W(\lambda))^{-1} = \frac{5}{2}JR(\lambda)$ .

11. Avec  $(\lambda^2 + \lambda - 1)^k R(\lambda)^{n-2k} = R(\lambda)^n W(\lambda)^k$  on obtient:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda^2 + \lambda - 1)^k R(\lambda)^{n-2k} = R(\lambda)^n \sum_{k=0}^n W(\lambda)^k.$$

Multiplions cette égalité par  $(I - W(\lambda))$ :

$(I - W(\lambda))S_n = R(\lambda)^n(I - W(\lambda)^{n+1}) = R(\lambda)^n - (\lambda^2 + \lambda - 1)^{n+1}R(\lambda)^{-n-2}$  puisque  $R(\lambda)$  et  $W(\lambda)$  commutent.

Avec  $(I - W(\lambda))^{-1} = \frac{5}{2}JR(\lambda)$ , la formule de Moivre et (3) et (4):

$$S_n = \frac{2}{5}J(R(\lambda)^{n+1} - (\lambda^2 + \lambda - 1)^{n+1}R(\lambda)^{-n-1}) = \frac{2}{5}J(F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I - (-F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I))$$

donc  $S_n = \frac{4}{5}F_{n+1}(\lambda)J^2 = F_{n+1}(\lambda)I$ .

12. Avec la formule de Moivre appliquée à  $R(\lambda)^{n-2k}$  et l'indépendance de  $I$  et  $J$  on déduit:

$$\sum_{k=0}^n (\lambda^2 + \lambda - 1)^k F_{n-2k}(\lambda) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^n (\lambda^2 + \lambda - 1)^k L_{n-2k}(\lambda) = 2F_{n+1}(\lambda).$$

13. En utilisant (2):  $\Delta_k(\lambda) = \det \begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & (1+2\lambda)L_{k-1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-2}(\lambda) \\ L_k(\lambda) & (1+2\lambda)L_k(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix}$  et par linéarité par rapport la seconde colonne du déterminant:

$$\Delta_k(\lambda) = (1-\lambda-\lambda^2) \det \begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & L_{k-2}(\lambda) \\ L_k(\lambda) & L_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix} = (\lambda^2 + \lambda - 1)\Delta_{k-1}(\lambda).$$

La suite  $(\Delta_k(\lambda))$  est donc une suite géométrique de raison  $(\lambda^2 + \lambda - 1)$ .

Le premier terme vaut  $\Delta_1(\lambda) = 2L_2(\lambda) - L_1(\lambda)^2 = 2(3+2\lambda+2\lambda^2) - (1+4\lambda+4\lambda^2) = 5$ .

On a donc  $\Delta_k(\lambda) = 5(\lambda^2 + \lambda - 1)^{k-1}$ .

14. Pour cette question il faut supposer  $L_k(\lambda) \neq 0$ .

$$L_k(\lambda)^2 P\left(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}\right) = (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-1}(\lambda)^2 + (1+2\lambda)L_{k-1}(\lambda)L_k(\lambda) - L_k(\lambda)^2.$$

$$\text{Avec (2): } L_k(\lambda)^2 P\left(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}\right) = L_{k-1}(\lambda)L_{k+1}(\lambda) - L_k(\lambda)^2 = \Delta_k(\lambda) = 5(\lambda^2 + \lambda - 1)^{k-1}.$$

$$15. \frac{2}{L_k}JR(0)^k = \frac{2}{L_k}J(F_kJ + \frac{1}{2}L_kI) = J + \frac{2F_k}{L_k}J^2 = J + \frac{5F_k}{2L_k}I.$$

$$\text{Mais } 5F_k = L_{k-1} + L_{k+1} = 2L_{k-1} + L_k \text{ donc } \frac{2}{L_k}JR(0)^k = J + \left(\frac{L_{k-1}}{L_k} + \frac{1}{2}\right)I = R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right).$$

16. Par (7) et (12):

$$F_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)J + \frac{1}{2}L_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)I = R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)^{2n} = \frac{2^{2n}}{L_k^{2n}}J^{2n}R(0)^{2nk} = \frac{5^n}{L_k^{2n}}(F_{2nk}J + \frac{1}{2}L_{2nk}I).$$

$$\text{Puisque } (I, J) \text{ est une famille libre on obtient } F_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \frac{5^n}{L_k^{2n}}F_{2nk} \text{ et } L_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \frac{5^n}{L_k^{2n}}L_{2nk}.$$

#### IV Une touche de probabilités

17. Il est clair que  $L_n > 0$  pour  $n \geq 0$ . De (4) on déduit que  $L_{-n} = (-1)^n L_n$  donc  $L_{2k} > 0$  pour tout entier  $k < 0$ .  
Par suite on a bien  $p_k > 0$  pour  $0 \leq k \leq 2n$ .

$$\text{Avec la première formule (14): } 2L_{i(2n+1)} = \frac{L_i^{2n+1}}{5^n} 2F_{2n+1}\left(\frac{L_{i-1}}{L_i}\right).$$

Avec la deuxième formule de la question 12:

$$2L_{i(2n+1)} = \frac{L_i^{2n+1}}{5^n} \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{L_{i-1}^2}{L_i^2} + \frac{L_{i-1}}{L_i} - 1\right)^k L_{2n-2k}\left(\frac{L_{i-1}}{L_i}\right).$$

Avec la deuxième formule (13):

$$2L_{i(2n+1)} = \frac{L_i^{2n+1}}{5^n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2)^k}{L_i^{2k}} \frac{5^{n-k}}{L_i^{2(n-k)}} L_{2i(n-k)} = L_i \sum_{k=0}^{2n} (L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2)^k 5^{-k} L_{2i(n-k)}.$$

De plus  $L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2 = L_{i-1}L_{i+1} - L_i^2 = \Delta_i(0) = 5(-1)^{i-1} = 5$  puisque  $i$  est impair.

$$\text{On obtient } 2L_{i(2n+1)} = \sum_{k=0}^{2n} L_i L_{2i(n-k)} \text{ d'où } \sum_{k=0}^{2n} p_k = 1.$$

Remarque: il y avait une démonstration directe en deux lignes, sans utiliser les questions précédentes mais en utilisant simplement  $L_n = a^n + b^n$  avec  $a$  et  $b$  racines de l'équation  $x^2 = x + 1$ , donc  $ab = -1$  (suite linéairement récurrente d'ordre 2):

$$\sum_{k=0}^{2n} a^{2i(n-k)} = a^{2in} \frac{1 - a^{-2i(2n+1)}}{1 - a^{-2i}} = \frac{a^{i(2n+1)} - a^{-i(2n+1)}}{a^i - a^{-i}} = \frac{L_{i(2n+1)}}{L_i} \text{ puisque } a^{-i} = -b^i \text{ et } a^{-i(2n+1)} = -b^{i(2n+1)}, i \text{ étant impair.}$$

$$\text{Mais } a \text{ et } b \text{ sont interchangeables donc } \sum_{k=0}^{2n} L_{2i(n-k)} = \sum_{k=0}^{2n} a^{2i(n-k)} + \sum_{k=0}^{2n} b^{2i(n-k)} = 2 \frac{L_{i(2n+1)}}{L_i}.$$