

Mines 2015 - Math1 PSI

Un corrigé

1 Préliminaires

1. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$, l'unique choix convenable de c est

$$c = e^{-\lambda}$$

2. On note tout d'abord que $P = (1 - p, p, 0, \dots)$ et $Q = (q, 1 - q, 0, \dots)$ sont bien des éléments de \mathcal{P} et que $\text{dist}(P, Q)$ est donc bien définie. Soit $A \subset \mathbb{N}$; distinguons les cas.
- Si $A \cap \{0, 1\} = \emptyset$, alors $|P(A) - Q(A)| = 0$.
 - Si $A \cap \{0, 1\} = \{0\}$ ou $A \cap \{0, 1\} = \{1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |p - q|$.
 - Sinon $A \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$ et $|P(A) - Q(A)| = 0$.

On en déduit que $\text{dist}(P, Q) \leq |p - q|$ et le majorant étant atteint pour une partie A ,

$$\text{dist}(P, Q) = \max_{A \subset \mathbb{N}} |P(A) - Q(A)| = |p - q|$$

3. Pour $f \in \text{calF}$, on choisit de noter $\|f\|_\infty = \max\{|f(n)|, n \in \mathbb{N}\}$ (qui existe puisque f est bornée). On a alors, pour $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(n)p_n| \leq \|f\|_\infty p_n$$

Le majorant étant le terme général d'une série convergente (de somme 1), $\sum (f(n)p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente et donc convergente.

2 Caractérisation

4. Soit $f \in \mathcal{F}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |nf(n)p_n^{(\lambda)}| \leq n\|f\|_\infty \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda\|f\|_\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

Le majorant étant le terme général d'une série (exponentielle, de référence) convergente, la série $\sum (nf(n)p_n^{(\lambda)})$ est absolument convergente et donc convergente.

5. On a (comme ci-dessus, et le terme pour $n = 0$ est nul)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

On effectue un changement de variable ($k = n - 1$) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)}$$

6. On note f_k la fonction telle que $f_k(k) = 1$ et $\forall n \neq k, f_k(n) = 0$, c'est à dire $f_k = \mathbf{1}_{\{k\}}$. En appliquant la propriété avec f_k , pour $k \geq 1$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, kq_k = \lambda q_{k-1}$$

Montrons par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_k = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$$

- Initialisation : c'est immédiat pour $k = 0$ ($q_0 = q_0$).
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que la relation soit vraie jusqu'au rang $k - 1$. On a alors

$$q_k = \frac{\lambda}{k} q_{k-1} = \frac{\lambda}{k} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} q_0 = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$$

ce qui prouve le résultat au rang k .

Avec la question 1, la condition $Q \in \mathcal{P}$ implique $q_0 = e^{-\lambda}$ et on a donc

$$Q = P_\lambda$$

3 Résolution de l'équation de Stein

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On peut définir par récurrence une fonction f_a sur \mathbb{N} en posant $f_a(0) = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_a(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left(n f_a(n) + \tilde{h}(n) \right)$$

Par construction, $f_a \in \mathcal{S}_h$ et on a donc trouvé une infinité d'éléments dans \mathcal{S}_h . *Remarque : on les a en fait trouvés tous.*

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Initialisation : pour $n = 1$, la relation se lit $\lambda f(1) = \tilde{h}(0)$ et elle est vérifiée (c'est la relation (2) pour $n = 0$).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai au rang n . La relation (2) donne alors

$$\lambda f(n+1) = n f(n) + \tilde{h}(n) = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{n!}{\lambda^n} \tilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$ en divisant par λ .

8. Commençons par une remarque. On pose $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$ en sorte que $\tilde{h}(n) = h(n) - \ell_h$. On a aussi

$$\ell_h = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

\tilde{h} étant bornée (somme d'une fonction bornée et d'une constante), $\sum (\tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!})$ est convergente et on a (les termes écrits existant)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - \ell_h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \ell_h - \ell_h e^\lambda = 0$$

ce qui donne

$$\tilde{h}(0) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Prouvons maintenant le résultat demandé par récurrence sur n .

- Initialisation : la relation (2) pour $n = 0$ donne

$$\lambda f(1) = \tilde{h}(0) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui donne le résultat au rang 1.

- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n . On a alors

$$\lambda f(n+1) = nf(n) + \tilde{h}(n) = -\frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \tilde{h}(n)$$

Le terme pour $k = n$ de la somme s'élimine avec le second terme du membre de droite et on obtient le résultat au rang $n+1$.

9. Si $f \in \mathcal{S}_h$ on a alors (majoration grossière avec la question précédente, on vérifie bien sûr que les termes écrits existent)

$$\forall n \geq 1, |f(n)| \leq \|\tilde{h}\|_{\infty} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Le changement de variable $j = k - n$ donne

$$\forall n \geq 1, |f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_{\infty}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^j \frac{n!}{(j+n)!}$$

En remarquant que $\frac{n!}{(j+n)!} = \frac{1}{(n+1)\dots(n+j)} \leq \frac{1}{j!}$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, |f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_{\infty}}{n} e^{\lambda}$$

ce qui montre que f est bornée avec

$$\|f\|_{\infty} \leq \max\left(|f(0)|, \frac{\|\tilde{h}\|_{\infty}}{n} e^{\lambda}\right)$$

4 Propriété de Lipschitz

10. En reprenant la notation $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$, on a $\ell_h = p_m^{(\lambda)}$ et donc

$$\tilde{h}(k) = h(k) - p_m^{(\lambda)}$$

En reprenant la formule (3), il vient

$$\forall n \geq 1, f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Si $n \leq m$, tous les termes de la première somme du membre de droite sont nuls et ainsi

$$\forall n \in [1, m], f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

11. En utilisant la relation (4), on obtient de même

$$\forall n \geq 1, f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Si $n > m$, tous les termes de la première somme sont nuls et ainsi

$$\forall n > m, f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall n \in [1, m], f_m(n) \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq m+1, f_m(n) \geq 0$$

12. On a $\Delta f_m(n) = f_m(n+1) - f_m(n)$ et on distingue deux cas.

- Si $n \in [[1, m-1]]$, on peut utiliser la formule de la question **10** pour les deux termes et on obtient

$$\Delta f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \left[(\lambda - n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right]$$

Pour montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est à dire aussi que

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui revient à dire (changement d'indice à gauche et regroupement des termes à droite) que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

Nous montrons maintenant que cette inégalité a bien lieu en remarquant que $\frac{n}{k!} \geq \frac{1}{(k-1)!}$ pour $k \in [[1, n]]$ et que donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!} \leq n \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Si $n > m$, on utilise cette fois la formule de la question **11** pour obtenir

$$\Delta f_m(n) = p_m^{(\lambda)} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left[\left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^n}{n!} \right]$$

Pour montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est à dire aussi que

$$n \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \lambda \sum_{k \geq n} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Ceci est vrai car $\frac{n}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!}$ quand $k \geq n$.

On a finalement prouvé que

$$\forall n \notin \{0, m\}, \Delta f_m(n) \leq 0$$

13. On a $\Delta f_0(0) = f_0(1) - f_0(0)$. $f_0(1)$ s'obtient avec la question **11** et vaut $\frac{0!}{\lambda^1} p_0^{(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1)$. On a ainsi

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0)$$

Pour $m > 0$, $\Delta f_m(m)$ est la différence d'un terme correspondant à la question **11** ($n = m+1$) et d'un autre correspondant à la question **10** ($n = m$). On obtient

$$\Delta f_m(m) = \frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)} \sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(m-1)!}{\lambda^m} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Comme $\frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)} = e^{-\lambda}/\lambda$, ceci donne

$$\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Il suffit de faire rentrer $\frac{\lambda}{m}$ et de changer d'indice pour conclure que

$$\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=1}^m \frac{k \lambda^k}{m k!} \right)$$

14. On suppose ici que $m > 0$. Pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a $\frac{k}{m} \leq 1$ et la question précédente donne

$$\Delta f_m(m) \leq \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Si $n \notin \{0, m\}$, on a aussi $\Delta f_m(n) \leq 0 \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$. On a donc un majorant de $\Delta f_m(n)$ pour tout n et donc un majorant de la borne supérieure :

$$\sup_{n \geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

15. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $g = h + c$. On a

$$\tilde{g}(n) = g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} g(k) p_k^{(k)} = h(n) + c - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(k)} - c \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(k)}}_{=1} = \tilde{h}(n)$$

D'après cette remarque et les formules (3), les valeurs sur \mathbb{N}^* des éléments de \mathcal{S}_h et \mathcal{S}_g sont égales. Comme les valeurs en 0 ne changent pas l'appartenance à \mathcal{S}_h ou \mathcal{S}_g , les ensembles sont donc égaux. En particulier,

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h+}$$

16. Travaillons à $n \geq 1$ fixé. Avec la question **10**, (on majore la somme partielle de la série exponentielle par la somme infinie ce qui est licite puisque les termes sont positifs)

$$\forall m \geq n, |f_m(n)| \leq \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} e^\lambda$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente ($\sum (p_m^{(\lambda)})$ converge) et $\sum (f_m(n))_{m \geq 0}$ est donc convergente. Or, h_+ est, comme h , bornée, et

$$\forall m \geq 0, |h_+(m) f_m(n)| \leq \|h_+\|_\infty |f_m(n)|$$

Finalement, $\sum (h_+(m) f_m(n))_{m \geq 0}$ est une série convergente.

17. Soit f la fonction proposée. On a (pas de souci pour regrouper des séries convergentes) pour tout $n \geq 0$,

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) (\lambda f_m(n+1) - n f_m(n))$$

Par définition de $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$, on a $\lambda f_m(m+1) - n f_m(m) = 1 - p_m^{(\lambda)}$ et $\lambda f_m(n+1) - n f_m(n) = -p_m^{(\lambda)}$ si $n \neq m$. Ainsi,

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)}$$

ce qui signifie exactement que f appartient à \mathcal{S}_{h_+} lui même égal à \mathcal{S}_h (question **15**).

18. Toutes les fonctions de \mathcal{S}_h prennent les mêmes valeurs sur \mathbb{N}^* . Comme on vient de trouver un élément de \mathcal{S}_h , on peut dire que pour tout élément de \mathcal{S}_h , on a

$$\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)(f_m(n+1) - f_m(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)\Delta f_m(n)$$

Comme h_+ est à valeurs positives et que Δf_m est négatif sauf peut-être pour $m = n$, on a alors

$$\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) \leq h_+(n)\Delta f_n(n)$$

La question 14 permet de majorer $\Delta f_n(n)$ par $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Comme h_+ est à valeurs positive, on peut multiplier l'inégalité par $h_+(n)$ sans changer le sens de l'inégalité et obtenir

$$\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} h_+(n)$$

Enfin, $h_+ \leq \sup h - \inf h$ et on peut multiplier par $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \geq 0$ pour conclure que

$$\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right)$$

5 Application probabiliste

19. Soit $\omega \in \Omega$ (l'univers). Dire que deux variables Y et Z sont égales, c'est dire que pour tout $j \in Y(\Omega) \cup Z(\Omega)$ les événements $Y = j$ et $Z = j$ sont les mêmes. Soit donc $j \in Y(\Omega) \cup Z(\Omega)$.
- Supposons que $\omega \in (X_k \cdot f(S) = j)$. On a alors $X_k(\omega) \cdot f(S)(\omega) = j$. Comme X_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on est amenés à distinguer deux cas.
 - Si $X_k(\omega) = 1$ alors $f(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) = j$. On a donc $f(1 + W_k(\omega)) = j$ et finalement $\omega \in (X_k \cdot f(1 + W_k) = j)$.
 - Sinon, $X_k(\omega) = 0$ et donc $j = 0$ et on a encore $\omega \in (X_k \cdot f(1 + W_k) = j)$ puisque $X_k(\omega) \cdot f(1 + W_k(\omega)) = 0$.
 - Réciproquement, supposons $\omega \in (X_k \cdot f(1 + W_k) = j)$. La même distinction de cas amène à $\omega \in (X_k \cdot f(S) = j)$.

Comme les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes mutuellement, toute fonction des X_i , $i \neq k$ est indépendante de X_k . C'est en particulier le cas de W_k et de $f(W_k)$. On a donc

$$\mathbb{E}(f(W_k)X_k) = \mathbb{E}(f(W_k))\mathbb{E}(X_k) = r_k\mathbb{E}(f(W_k))$$

puisque l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p vaut p .

20. Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors (formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $((X_k = 0), (X_k = 1))$)

$$\mathbb{P}(S = j) = (1 - r_k)\mathbb{P}(X_k = j) + r_k\mathbb{P}(W_k = j - 1)$$

puisque $\mathbb{P}(S = j|X_k = 0) = \mathbb{P}(W_k = j)$ et $\mathbb{P}(S = j|X_k = 1) = \mathbb{P}(W_k = j - 1)$. On en déduit (par utilisation de la formule de transfert) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S+1)) &= \sum_j \mathbb{P}(S = j)f(j+1) \\ &= (1 - r_k) \sum_j f(j+1)\mathbb{P}(W_k = j) + r_k \sum_j f(j+1)\mathbb{P}(W_k = j - 1) \\ &= (1 - r_k)\mathbb{E}(f(1 + W_k)) + r_k\mathbb{E}(f(2 + W_k)) \end{aligned}$$

On multiplie ces égalités par r_k et on somme pour obtenir

$$\lambda \mathbb{E}(f(S+1)) = \sum_{k=1}^n r_k^2 (\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbb{E}(f(1+W_k))$$

On interprète $r_k \mathbb{E}(1+W_k) = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(1+W_k) = \mathbb{E}(X_k f(1+W_k)) = \mathbb{E}(X_k f(S))$ (question précédente) pour avoir

$$\lambda \mathbb{E}(f(S+1)) = \sum_{k=1}^n r_k^2 (\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k f(S))$$

Par linéarité de l'espérance, ceci devient

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \sum_{k=1}^n r_k^2 (\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k)))$$

Il reste à écrire que $r_k^2 (\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) = r_k (\mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(f(1+W_k)))$ et à utiliser l'indépendance de X_k et W_k (et encore la linéarité de l'espérance) pour conclure que

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \sum_{k=1}^n r_k \mathbb{E}(X_k (f(W_k+2) - f(W_k+1)))$$

Remarque : l'hypothèse $f \in \mathcal{S}_h$ ne sert à rien.

21. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Par définition de \mathcal{S}_{1_A} , on a

$$\forall j, \lambda f_A(j+1) - j f_A(j) = \mathbf{1}_A(j) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}$$

Par ailleurs, par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_j (\lambda f_A(j+1) - j f_A(j)) \mathbb{P}(S=j)$$

Combinons les formules :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) &= \sum_j \mathbf{1}_A(j) \mathbb{P}(S=j) - \sum_{j,k} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)} \mathbb{P}(S=j) \\ &= \sum_{j \in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_k \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)} \\ &= \sum_{j \in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_{k \in A} p_k^{(\lambda)} \end{aligned}$$

Si on revient à la définition de la distance définie par l'énoncé, on obtient donc

$$\text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))|$$

22. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Avec la question **20**, on a (toujours avec l'indépendance de X_k et W_k)

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_{k=1}^n r_k^2 \mathbb{E}(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1))$$

Avec la formule (5) (et comme $\mathbf{1}_A$ peut prendre les valeurs 0 ou 1) on a

$$|f_A(W_k + 2) - f_A(W_k + 1)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Il reste à combiner le tout pour conclure que

$$|\mathbb{E}(\lambda f_A(S + 1) - S f_A(S))| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^n r_k^2$$

et comme le majorant est indépendant de A , la question précédente donne enfin

$$\text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^n r_k^2$$