A 2014 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Opérateur de moyenne

Notations

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbf{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

On note $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}_b^0$ l'ensemble des fonctions bornées appartenant à $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}_+^{0*}$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^0$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

On note $\|\cdot\|$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}_b^0$: si f est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, $\left\|f\right\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|f(x)\right|$.

Dans tout le problème la fonction f est un élément de $\mathscr{C}^0$ et la fonction ω un élément de $\mathscr{C}_+^{0*}$.

1 L'opérateur de moyenne

Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose

$$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Question 1 *Montrer que la formule* (1) *définit une fonction φ_ω continue sur $\mathbf{R}^*$ et qu'elle se prolonge continûment à $\mathbf{R}$. Déterminer* $\lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$.

On notera encore φ_ω ce prolongement.

On note A_ω l'application qui à f fait correspondre φ_ω.

Question 2 *Montrer que A_ω définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$; est-ce également un endomorphisme de $\mathscr{C}_b^0$?*

Question 3 *Démontrer que A_ω est injectif.*

On dit que λ est une valeur propre de A_ω sur $\mathscr{C}_b^0$, s'il existe $u \in \mathscr{C}_b^0$ non identiquement nulle telle que $A_\omega(u) = \lambda u$. La fonction u est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Question 4 *Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la restrictions à $\mathbf{R}_+^*$ d'un vecteur propre u de A_ω.*

Question 5 *Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que sa solution ne peut se prolonger par continuité en 0 que si $\lambda \in \,]0,1]$.*

Question 6 *Dans le cas où ω est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_ω et les sous-espaces propres associés (on pourra distinguer le cas $\lambda = 1$).*

2 Le cas périodique

On suppose désormais que ω est τ-périodique et que f est T-périodique, où τ et T sont des réels strictement positifs.

Question 7 *Montrer que $\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.*

Question 8 *Montrer que ω admet un maximum et un minimum strictement positifs.*

Périodes commensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est rationnel.

Question 9 *Déterminer $\theta > 0$ tel que pour tout x,*

$$\omega(x+\theta) = \omega(x) \text{ et } f(x+\theta) = f(x).$$

On note E l'application partie entière de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, et pour $\theta \in \mathbf{R}_+^*$,

$$E_\theta(x) = \theta E(x/\theta), \text{ où } x \in \mathbf{R}.$$

Question 10 *Représenter graphiquement la fonction E_θ pour $-2\theta \leq x \leq 3\theta$.*

Question 11 *Déterminer $A_\omega(f) \circ E_\theta$ sur $[k\theta, (k+1)\theta[$ où $k \in \mathbf{Z}^*$. Démontrer que*

$$\left(A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x) = A_\omega(f)(\theta)$$

pour $x \in [0, \theta[$.

Question 12 *Montrer que $\left|\int_{E_\theta(x)}^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \theta \left\|f\right\| \|\omega\|$.*

Question 13 *Démontrer que, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$*

$$\left|\left(A_\omega(f) - A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x)\right| \leq \frac{\theta \left\|f\right\| \|\omega\|}{x \min \omega}\left(\frac{\|\omega\|}{\min \omega} + 1\right).$$

Question 14 *En déduire que $A_\omega(f) \in \mathscr{C}^0$ et possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et en donner une expression. Qu'en est-il lorsque x tend vers $-\infty$?*

Périodes incommensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est irrationnel.

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{Z}_N = \{n \in \mathbf{Z} \,|\, -N \leq n \leq N\}$.

Question 15 *Pour $n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}$, on pose $S_n(\tau, T) = \{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z}\}$. Démontrer que $S_n(\tau, T)$ admet un minimum non nul.*

Question 16 *On pose $S(N, \tau, T) = \left\{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}\right\}$. Démontrer que $S(N, \tau, T)$ admet un minimum non nul.*

On suppose à présent que ω est non seulement continue, mais de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Question 17 *Démontrer qu'il existe des nombres complexes γ_m, où $m \in \mathbf{Z}$, tels que $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \left|\gamma_m\right|$ converge et tels que pour tout $n \in \mathbf{Z}$,*

$$\int_0^x \omega(t) e^{2i\pi nt/T} \mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \gamma_m \int_0^x e^{2i\pi t(n/T + m/\tau)} \mathrm{d}t.$$

Question 18 *Soit $p(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{2i\pi nt/T}$, où les c_n appartiennent à $\mathbf{C}$, montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$*

$$\left| A_\omega\left(p\right)(x) - \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{K}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On rappelle le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction f continue, T-périodique et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p, soit

$$p(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}_N} c_n e^{2i\pi nt/T} \text{ où } c_n \in \mathbf{C},$$

tel que $\left\|f - p\right\| \leq \varepsilon/3$.

Question 19 *En déduire que $A_\omega\left(f\right)(x)$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$, et en donner une expression.*

Fin de l'épreuve