A 2014 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Somme de projecteurs

Notations

On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des réels et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X.

Soit $\mathscr{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(\mathrm{T})$ le noyau de T et $R(\mathrm{T})$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Question 1 *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, montrer que* $\operatorname{tr} \mathbb{AB} = \operatorname{tr} \mathbb{BA}$.

Question 2 *Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ associée à* T *est indépendante de la base $\mathscr{B}$.*

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr}\mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

Soit P un projecteur de X.

Question 3 *Démontrer que* $X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P})$.

Question 4 *En déduire que* $\operatorname{rg}\mathrm{P} = \operatorname{tr}\mathrm{P}$.

On pose $\mathrm{P}' = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.

Question 5 *Montrer que* $R(\mathrm{P}') = N(\mathrm{P})$ *et que* $R(\mathrm{P}) = N(\mathrm{P}')$.

Question 6 *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

Question 7 *Montrer que si l'endomorphisme* S *est une somme finie de projecteurs* P_i, $i = 1, \ldots, m$, *alors* $\operatorname{tr}\mathrm{S} \in \mathbf{N}$ *et* $\operatorname{tr}\mathrm{S} \geq \operatorname{rg}\mathrm{S}$.

2 Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P **est égal à** 1.

Question 8 *Démontrer qu'il existe* $\mu \in \mathbf{R}$ *tel que* $\mathrm{PTP} = \mu\mathrm{P}$.

Soit $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition

$$X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P}).$$

Question 9 *Montrer que dans la base* $\mathscr{C}$ *la matrice représentant* T *s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & \times & \times \\ \hline \times & & \\ & \mathbb{B} & \\ \times & & \end{array}\right], \tag{1}$$

où μ *est le nombre réel dont l'existence découle de la question* **8**, *et* $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

Question 10 *Montrer que si* $\mathrm{P}'\mathrm{TP}'$ *n'est pas proportionnel à* P', *alors* $\mathbb{B}$, *défini en* (1), *n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que* $\mathrm{P}' = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.

3 Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T **n'est pas une homothétie.**

Question 11 *Démontrer qu'il existe un vecteur* $x \in X$ *tel que* x *et* $\mathrm{T}x$ *ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).*

Question 12 *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *dans laquelle la matrice* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *est de la forme suivante :*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}.$$

Question 13 *En déduire que si* $\operatorname{tr}\mathrm{T}=0$, *il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle la diagonale de* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ *est nulle.*

Soit t_i, $i=1,\ldots,n$ **une suite de** n **nombres réels vérifiant** $\operatorname{tr}\mathrm{T}=\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Question 14 *En dimension* $n=2$, *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i=1,2$.

Soit $t\in\mathbf{R}$, on admettra qu'en dimension $n\geq 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{LTL}=t\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L'TL'}$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L'}=\mathrm{I}-\mathrm{L}$.

Question 15 *En dimension* $n\geq 3$, *à l'aide des questions* **9** *et* **10** *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{C}$ *dans laquelle la matrice représentant* T *s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}}=\left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \hline \times & & \\ & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{B}} \\ \times & & \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

Question 16 *En dimension* $n\geq 3$, *démontrer par récurrence qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i=1,\ldots,n$.

4 Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\operatorname{tr}\mathrm{T}\in\mathbf{N}$ et $\operatorname{tr}\mathrm{T}\geq \operatorname{rg}\mathrm{T}$. On pose $\rho=\operatorname{rg}\mathrm{T}$ et $\theta=\operatorname{tr}\mathrm{T}$.

Question 17 *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *est de la forme suivante :*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right],$$

où $\mathbb{T}_1$ *est une matrice de taille* $\rho\times\rho$.

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ **ne soit pas la matrice d'une homothétie**

Question 18 *A l'aide de la question* **16** *montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}=\left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \times & \cdots & \\ \times & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbb{O} \\ \times & \cdots & \cdots & \end{array}\right] \quad \text{où les } t_i,\ i=1,\rho \text{ sont des entiers non nuls.}$$

Question 19 *En déduire que* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.

Question 20 *Démontrer que là encore,* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

Fin de l'épreuve