Mines PC 2014 maths 1

Partie 1

Question 1

On détaille $\mathbb{A} = [a_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ et $\mathbb{A} = [b_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$.

Pour tout $p \in [[1, n]]$, le p-ième coefficient diagonal de $\mathbb{AB}$ est $\sum_{j=1}^{n} a_{pj}b_{jp}$, donc la trace de $\mathbb{AB}$ est $\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{pj}b_{jp}\right)$: cette somme est la somme des sommes des coefficients des colonnes du tableau $[a_{pj}b_{jp}]_{(p,j)\in[[1,n]]^2}$, autrement dit la somme de tous les coefficients de ce tableau.
En échangeant les rôles de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et en utilisant la commutativité de la multiplication des réels, on trouve de même que $\mathrm{tr}\,(\mathbb{BA}) = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jp}b_{pj}\right)$: c'est la somme de tous les coefficients du tableau $[a_{jp}b_{pj}]_{(p,j)\in[[1,n]]^2}$.
Mais ces deux tableaux sont transposés l'un de l'autre : les sommes de leurs coefficients sont donc les mêmes.
Finalement : $\boxed{\mathrm{tr}\,(\mathbb{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{BA})}$.

Question 2

On considère $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de X, et on note Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$.
On sait que $\mathbb{T}_{\mathscr{B}_2} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}_1}Q$.
En appliquant le résultat de la question 1 à $A = Q^{-1}$ et $B = \mathbb{T}_{\mathscr{B}_1}Q$, on trouve :
$\mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}_2}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}_1}QQ^{-1})$, donc $\mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}_2}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}_1})$.
On a bien montré que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$.

Question 3

On va utiliser le fait que X soit de dimension finie pour accélérer la démonstration.

- Comme P est un endomorphisme de X, $R(P)$ et $N(P)$ sont deux sous-espaces vectoriels de X.

- Comme X est de dimension finie, la théorème du rang donne :
  $\dim(X) = \dim(R(P)) + \dim(N(P))$.

- Comme $R(P)$ et $N(P)$ sont deux sous-espaces vectoriels de X, le vecteur nul 0_X de X appartient à $R(P) \cap N(P)$.
  Réciproquement, si y est un élément de $R(P) \cap N(P)$, alors d'une part il existe $x \in X$ tel que $y = P(x)$, et d'autre part $P(y) = 0_X$.
  Ainsi, $P(P(x)) = 0_X$. Or $P^2 = P \circ P = P$, donc $P(x) = 0_X$, donc $y = 0_X$.
  Finalement, $R(P) \cap N(P) = \{0_X\}$.

- On peut bien conclure que $\boxed{X = R(P) \oplus N(P)}$.

Question 4

- Comme $P^2 = P$,pour tout $y \in R(P)$, il existe $x \in X$ tel que $y = P(x)$, et donc $P(y) = P^2(x) = P(x) = y$.

- On écrit la matrice de P relativement à une base $\mathscr{B}$ de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.
  $\mathscr{B}$ est formée de $\dim(R(P)) = \operatorname{rg}(P)$ vecteurs de $R(P)$ suivis de $\dim(X) - \dim(R(P))$ vecteurs de $N(P)$.
  Ainsi, les $\operatorname{rg}(P)$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ sont inchangés par P, et l'image par P des autres est le vectaur nul, donc la matrice de P relativement à $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale, dont les $\operatorname{rg}(P)$ premiers coefficients diagonaux valent 1, et les autres coefficients diagonaux valent 0. La trace de cette matrice est $\operatorname{rg}(P)$, donc, d'après la définition donnée à la question 2, $\boxed{\operatorname{tr}(P) = \operatorname{rg}(P)}$.

Ce qui précède est un résultat important, à connaître et à savoir redémontrer.

Question 5

- La matrice de $I - P$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ déjà utilisée dans la question précédente est la matrice diagonale $\mathbb{D}$ d'ordre n dont les $\operatorname{rg}(P)$ premiers coefficients valent $1 - 1 = 0$ et les $n - \operatorname{rg}(P)$ derniers valent $1 - 0 = 1$.
  Il s'agit d'une matrice de rang $n - \operatorname{rg}(P)$, donc, d'après le théorème du rang, $\dim(N(P')) = \operatorname{rg}(P)$.
  Mais on lit directement sur $\mathbb{D}$que les $\operatorname{rg}(P)$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ appartiennent à $N(P')$, et donc ils forment une famille libre de $\dim(N(P'))$ vecteurs de $N(P')$, c'est-à-dire une base de $N(P')$.
  De même, les $n - \operatorname{rg}(P)$ derniers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une famille libre de vecteurs invariants par P', donc forment une famille libre de $\dim(R(P'))$ vecteurs de $R(P')$, autrement dit une base de $R(P')$.

- Le même raisonnement effectué sur la matrice de P relativement à $\mathscr{B}$ prouve que les $\operatorname{rg}(P)$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $R(P)$, et les $n - \operatorname{rg}(P)$ derniers forment une base de $N(P)$.

- On peut donc conclure que $\boxed{R(P) = N(P') \text{ et } N(P) = R(P')}$.

En fait, le cours affirme que P' est le projecteur sur $N(P)$ parallèlement à $R(P)$, ce qui répond directement à la question.
Mais la façon dont elle est posée me donne l'impression que l'auteur de l'énoncé ne supposait pas ce résultat connu.

Question 6

En concaténant une base de F et une base de G, on obtient une famille génératrice de $F + G$, formée de $\dim(F) + \dim(G)$ vecteurs.
Or la dimension de $F + G$ est inférieure ou égale au nombre des vecteurs de n'importe quelle famille génératrice de $F + G$,
donc $\boxed{\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)}$.
On peut aussi utiliser la formule de Grassmann.

Question 7

- Par linéarité de la trace, la trace de S et la somme des traces de P_1, ..., P_m.
  Or, d'après la question 4, la trace d'un projecteur de X est égal à son rang,
  donc $\operatorname{tr}(S) = \operatorname{rg}(P_1) + \cdots + \operatorname{rg}(P_m)$.
  Ainsi, comme somme d'entiers naturels, la trace de S est encore un entier naturel.

- Si $y \in R(S)$, alors il existe $x \in X$ de sorte que $y = S(x) = P_1(x) + \cdots + P_m(x)$.
  Ainsi, $y \in (R(P_1) + \cdots + R(P_m))$.
  On vient de prouver que $R(S) \subset (R(P_1) + \cdots + R(P_m))$, donc, comme on travaille uniquement sur des espaces vectoriels de dimensions finies,
  $\dim(R(S)) \leqslant \dim(R(P_1) + \cdots + R(P_m))$, et donc, d'après la question 6,
  $\operatorname{rg}(S) \leqslant \dim(R(P_1)) + \cdots + \dim(R(P_m))$.
  Or $\dim(R(P_1)) + \cdots + \dim(R(P_m)) = \operatorname{rg}(P_1) + \cdots + \operatorname{rg}(P_m) = \operatorname{tr}(S)$,
  et donc : $\boxed{\operatorname{rg}(S) \leqslant \operatorname{tr}(S)}$.

Partie 2

Question 8

J'utilise une notation un peu plus précise que celle de l'énoncé : $\mathbb{O}_{i,j}$ désigne la matrice nulle à i lignes et j colonnes.

La matrice de P relativement à la base $\mathscr{C}$ s'écrit, par blocs, $\mathbb{P}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{O}_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$.

On effectue le même découpage sur $\mathbb{T}_{\mathscr{C}}$, qui s'écrit $\begin{bmatrix} \mu & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$, où $\mathbb{L}$ est une ligne de $n-1$ coefficients, $\mathbb{C}$ une colonne de $n-1$ coefficients, μ un réel, et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

On peut alors effectuer le produit $\mathbb{P}_{\mathscr{C}}\mathbb{T}_{\mathscr{C}}\mathbb{P}_{\mathscr{C}}$ par blocs : on obtient

$\mathbb{P}_{\mathscr{C}}\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \mu & \mathbb{L} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{O}_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$, puis $\mathbb{P}_{\mathscr{C}}\mathbb{T}_{\mathscr{C}}\mathbb{P}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \mu & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{O}_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \mu\mathbb{P}_{\mathscr{C}}$.

Ainsi, les matrices relativement à $\mathscr{C}$ de PTP et μP sont égales, donc $\boxed{PTP = \mu P}$.

Question 9

C'est déjà fait au 8 !

Je pense que l'auteur de l'énoncé avait une autre idée en tête que le produit par blocs.

Question 10

On va démontrer la contraposée de l'implication proposée.

On suppose que $\mathbb{B}$ est une matrice d'homothétie, donc qu'elle est de la forme $\beta\mathbb{I}_{n-1}$, où β est un réel, et $\mathbb{I}_{n-1}$ la matrice identité d'ordre $n-1$.

La matrice de P' relativement à $\mathscr{C}$ est $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix}$, donc celle de $P'TP'$ est, toujours en effectuant les produits par blocs, $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \beta\mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} = \beta\mathbb{Q}$, et donc $P'TP' = \beta P'$.

On a donc prouvé que, si $\mathbb{B}$est une matrice d'homothétie, alors $P'TP'$ est proportionnel à P', ce qui, par contraposition, est exactement le résultat demandé.

Partie 3

Question 11

On va encore travailler par contraposition : on suppose que, pour tout $x \in X$, Tx est colinéaire à x.
On fixe alors $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de X.
D'après l'hypothèse, il existe des réels λ_1, ..., λ_n de sorte que $Te_1 = \lambda_1 e_1$, ..., $Te_n = \lambda_n e_n$.
Il existe aussi un réel μ de sorte que $T(e_1 + \cdots + e_n) = \mu (e_1 + \cdots + e_n)$.
Mais, par linéarité de T, $T(e_1 + \cdots + e_n) = Te_1 + \cdots + Te_n = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.
Ainsi, $(\lambda_1 - \mu) e_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu) e_n = 0_X$, donc, comme la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, $\lambda_1 - \mu$, ..., $\lambda_n - \mu$ sont tous nuls, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu$.
La matrice de T relativement à $\mathscr{B}$ est donc $\mu \mathbb{I}_n$, donc $T = \mu I$, donc T est une homothétie.
Par contraposition, on a bien prouvé que, si T n'est pas une homothétie, il existe un vecteur x de sorte que (x, Tx) soit libre.
C'est encore un grand classique, à savoir refaire!

Question 12

D'après le résultat de la question 11, il existe un vecteur x de X de sorte que la famille (x, Tx) soit libre.
On pose alors $e_1 = x$, $e_2 = Tx$, et on applique le théorème de la base incomplète : on peut trouver des vecteurs e_3, ..., e_n de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ soit une base de X.
Comme $e_2 = Te_1$, la première colonne de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$: c'est le résulat demandé.

Question 13

On va procéder montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$ et tout endomorphisme T de trace nulle autr qu'une homothétie d'un espace vectoriel réel X de dimension n, il existe une base de X relativement à laquelle la matrice de T soit de diagonale nulle.

- Lorsque $n = 2$:
  comme T n'est pas une homothétie, d'après la question 12, il existe une base $\mathscr{B}'$ de X relativement à laquelle la matrice de T est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
  D'après la définition de la question 2, la trace de T est donc β.
  Mais cette trace est nulle, donc $\beta = 0$, donc $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- On considère un entier $n \geqslant 2$ pour lequel le résultat est vrai.
  Soit alors T un endomorphisme autre qu'une homothétie de trace nulle d'un espace vectoriel de dimension $n + 1$.
  D'après la question 12, il existe une base $\mathscr{B}_1$ de X relativement à laquelle la matrice de T s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$, où $\mathbb{L}$est une ligne à n coefficients, $\mathbb{C}$ est la colonne dont le premier coefficient vaut 1 et les $n - 1$ autres sont nuls, et $\mathbb{B}$ est une matrice carrée.

Mais alors la trace de T est à la fois nulle et égale à celle de $\mathbb{B}$, donc $\mathbb{B}$ est une matrice d'ordre n et de trace nulle.

- Si $\mathbb{B}$ est une matrice d'homothétie, et si λ est le rapport de cette homothétie, alors $\mathrm{tr}\,(\mathbb{B}) = n\lambda$, donc $\lambda = 0$, donc $\mathbb{B}$ est la matrice nulle d'ordre n, ce qui achève l'étude de ce cas.
- Dans le cas contraire, par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ relativement à laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{B}$ soit de diagonale nulle.
  On note alors $\mathbb{Q}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathscr{B}$, et $\mathscr{B}'$ la famille de X de matrice $\begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n} \\ \mathbb{O}_{n,1} & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ relativement à $\mathscr{B}_1$.
  Un produit par blocs immédiat montre que $\begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n} \\ \mathbb{O}_{n,1} & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n} \\ \mathbb{O}_{n,1} & \mathbb{Q}^{-1} \end{bmatrix}$, donc $\mathscr{B}_2$ est une base de X.
  Enfin, d'après la formule de changement de base, la matrice de T relativement à $\mathscr{B}_2$ est $\begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n} \\ \mathbb{O}_{n,1} & \mathbb{Q}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n} \\ \mathbb{O}_{n,1} & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$.
  On calcule encore ce produit par blocs, ce qui donne : $\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{L}\mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{C} & \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{Q} \end{bmatrix}$.
  Enfin, $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{Q}$ est, par définition, une matrice de diagonale nulle, donc $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ l'est aussi.

- Le résultat demandé dans cette question est donc démontré par récurrence sur n.
  C'est à nouveau un grand classique, au moins pour les concours "étoilés".

Question 14

J'ai résolu cette question par "tâtonnements" successifs, en essayant de "bricoler" une base (f_1, f_2) qui ait un vecteur commun avec (e_1, e_2).
D'après le premier point de la démonstration précédente, comme T n'est pas une homothétie, il existe une base (e_1, e_2) de X relativement à laquelle la matrice de T s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
On pose alors $f_1 = e_1$ et $f_2 = -t_1 e_1 + e_2$. f_2 n'est pas colinéaire à f_1, donc (f_1, f_2)est une famille libre de $2 = \dim(X)$ vecteurs de X, donc est une base de X.
Mais $Te_1 = e_2$, donc $Tf_1 = e_2 = f_2 + t_1 e_1 = f_2 + t_1 f_1$.
La matrice de T relativement à (f_1, f_2) s'écrit donc $\begin{bmatrix} t_1 & \delta_1 \\ 1 & \delta_2 \end{bmatrix}$, où δ_1 et δ_2 sont réels.
Mais, d'après la question 2, la trace de cette matrice est $t_1 + t_2$, donc $\delta_2 = t_2$, donc les coefficients diagonaux de la matrice de T relativement à la base (f_1, f_2) sont t_1 et t_2.

Question 15

On applique d'abord le résultat admis avec $t = t_1$. Le résultat demandé est alors une conséquance directe des résultats des questions 9 et 10.
Le lecteur curieux peut bien sûr rechercher une démonstration du résultat admis.

Question 16

- On va démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 3$, pour tout endomorphisme T d'un espace vectoriel réel X de dimension n qui ne soit pas une homothétie et pour tout n-uplet $(t_1, \cdots, t_n)$ de réels tel que $t_1 + \cdots + t_n = \operatorname{tr}(T)$, il existe une base de X relativement à laquelle la matrice représentative de T a pour coefficients diagonaux $t_1, \cdots, t_n$.

- Si Test un endomorphisme d'un espace vectoriel réel X de dimension 3 qui ne soit pas une homothétie et si t_1, t_2, t_3 sont trois réels tels que $t_1 + t_2 + t_3 = \operatorname{tr}(T)$:
  D'après la question 15, il existe une base $\mathscr{C}$ relativement à laquelle la matrice de T s'écrit $\begin{bmatrix} t_1 & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$, où $\mathbb{B}$ est une matrice carrée d'ordre 2 qui n'est pas une matrice d'homothétie.
  Mais alors la trace de $\mathbb{B}$ est $\operatorname{tr}(T) - t_1 = t_2 + t_3$ et $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie, donc, d'après la question 14, il existe une base de $\mathbb{R}^2$ relativement à laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{B}$ a t_2 et t_3 pour coefficients diagonaux.
  On termine alors comme dans la phase d'itération de la question 13 pour construire une base $\mathscr{B}''$ de X relativement à laquelle la matrice représentative de T a pour coefficients diagonaux t_1, t_2, t_3.

- On considère n un entier naturel supérieur ou égal à 3 pour lequel le résultat est vrai.
  Soit alors T un endomorphisme autre qu'une homothétie d'un espace vectoriel réel de dimension $n+1$ et $t_1, \cdots, t_{n+1}$ $n+1$ réels dont la somme est la trace de T.
  On commence comme au point précédent, on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\mathbb{B}$, et on termine à nouveau comme dans la phase d'itération de la question 13 pour construire une base de X relativement à laquelle la matrice représentative de T a pour coefficients diagonaux $t_1, \cdots, t_{n+1}$.

- Le résutat demandé est donc bien prouvé par récurrence sur n.

Partie 4

Question 17

D'après le théorème du rang, le noyau de T est de dimension $n - \rho$.
On part d'une base de $\mathscr{B}$' de X adaptée au noyau de T : elle s'écrit $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, où $\mathscr{B}_1$ est une base du noyau de T.
Il suffit alors d'écrire la matrice de T relativement à la base $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1)$.

Question 18

La trace de $\mathbb{T}_1$ est la même que celle de $\mathbb{T}$: c'est donc un entier naturel supérieur ou égal à ρ.
Ainsi, $t_1 = 1$, ..., $t_{\rho-1} = 1$,$t_\rho = \operatorname{tr}(T) - \rho$ sont ρ entiers naturels non nuls.
Lorsque $\rho = 2$, on applique directement la question 14 : il existe une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$ relativement à laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{T}_1$ a pour coefficients diagonaux 1 et $t_2 = \operatorname{tr}(T) - 1$.
Lorsque $\rho \geqslant 3$, on applique la question 16 : il existe $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^\rho$ relativement à laquelle la matrice $\mathbb{V}$ de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{T}_1$ a pour coefficients diagonaux
$t_1 = 1$, ..., $t_{\rho-1} = 1$,$t_\rho = \operatorname{tr}(T) - \rho$.
Dans les deux cas, on note $\mathbb{Q}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^\rho$ vers $\mathscr{C}$.

Comme dans la question 13, la famille $\mathscr{B}'$ de matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{O}_{n-\rho,\rho} & \mathbb{I}_{n-\rho} \end{bmatrix}$ est une base de X, relativement à laquelle la matrice de t est $\begin{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1} & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{O}_{n-\rho,\rho} & \mathbb{I}_{n-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{O}_{n-\rho,\rho} & \mathbb{I}_{n-\rho} \end{bmatrix}$.
Les formats des divers blocs permettent d'effectuer le produit pas blocs, et on trouve que la matrice de T relativement à $\mathscr{B}'$ est $\begin{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{T}_1\mathbb{Q} & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2\mathbb{Q} & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}$.
Comme les coefficients diagonaux de $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{T}_1\mathbb{Q}$ sont $t_1 = 1$, ..., $t_{\rho-1} = 1, t_\rho = \operatorname{tr}(T) - \rho$, on vient de prouver le résultat demandé.

Question 19

- On considère d'abord $\mathbb{P}$ une matrice carrée d'ordre n dont une seule colonne, la i-ième, est non nulle, et dont le i-ième coefficient de la i-ième colonne vaut 1 : $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{i-1,i} & \\ & 1 & \\ (0) & a_{i+1,i} & (0) \\ & \vdots & \\ & a_{n,i} & \end{bmatrix}$.
  On constate par un calcul direct que $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$.

- On écrit la matrice $\mathbb{A}$ trouvée à la question 18 sous la forme $\mathbb{P}_1 + \cdots + \mathbb{P}_{\rho-1} + t_\rho \mathbb{P}_\rho$, où, pour tout $i \in [[1, \rho - 1]]$, $\mathbb{P}_i$ est la matrice carrée d'ordre n dont la i-ième colonne est aussi celle de $\mathbb{A}$, et dont les autres sont nulles, et où $\mathbb{P}_\rho$ est la matrice carrée d'ordre n dont la ρ-ième colonne est aussi $\dfrac{1}{t_\rho}$ multipliée par celle de $\mathbb{A}$, et dont les autres sont nulles.
  On vient de voir que $\mathbb{P}_1, \cdots, \mathbb{P}_\rho$ sont toutes des matrices de projecteurs, et, comme t_ρ est un entier naturel non nul, on vient donc d'écrire T comme la somme de $\operatorname{tr}(T)$ projecteurs de rang 1.

Question 20

- Dans le cas où $\operatorname{tr}(\mathbb{T}_1) > \rho$, on écrit $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \mathbb{P} + (\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} - \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient supérieur gauche vaut 1 et tous les autres 0.
  La matrice $\mathbb{T}_3$ obtenue en retirant 1 au coefficient supérieur gauche de $\mathbb{T}_1$ n'est plus une matrice d'homothétie, et sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à ρ, donc on peut applique les résultats des questions 18 et 19 à la matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{T}_3 & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}$: on peut l'écrire comme somme finie de matrices de projecteurs.
  Quant à $\mathbb{P}$, c'est elle-même une matrice de projecteurs d'après la question 19, et donc T est bien une somme finie de projecteurs.

- Dans le cas où $\operatorname{tr}(\mathbb{T}_1) = \rho$, le rapport de l'homothétie représentée par $\mathbb{T}_1$ est 1 (cf question 13), donc $\mathbb{T}_1 = \mathbb{I}_\rho$.
  Mais alors $\begin{bmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_\rho & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_\rho & \mathbb{O}_{\rho,n-\rho} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O}_{n-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}$ (c'est directement un produit par blocs), et donc T est déjà un projecteur