A 2011 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Oscillations linéaires et un théorème ergodique.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $C^k([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque fonction $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, on notera $x'(t)$ la dérivée première de x au point t et $x''(t)$ sa dérivée seconde.

On désignera $C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont $2\pi-$périodiques ; $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t+2\pi) = h(t)$. Pour $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ on posera :

$$||h|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|\,.$$

On désigne par $\langle ; \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$. On identifiera chaque vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur colonne, encore noté x, de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère deux matrices A et K de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ symétriques d'ordre n à coefficients réels. On suppose que pour tout vecteur colonne non nul x de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle Ax;x\rangle > 0,\ \langle Kx;x\rangle > 0\,.$$

I. Oscillations d'un certain système linéaire.

❏ **Q1** – Prouver que la matrice symétrique réelle A est inversible. (On pourra considérer le noyau de l'application $x \mapsto Ax$).

❏ **Q2** – Prouver que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle A^{-1}x;y\rangle = \langle x;A^{-1}y\rangle$. En déduire que la matrice A^{-1} est symétrique.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose : $(x;y)_A = \langle Ax;y\rangle$. On désigne par E l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $E(x) = A^{-1}Kx$.

❏ **Q3** – Prouver que $(;)_A$ définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Puis montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (E(x);y)_A = (x;E(y))_A\,.$$

❏ **Q4** – Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^n$ et n réels strictement positifs $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$ $(1 \le i \le n)$ tels que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ A^{-1}Ke_i = \lambda_i e_i\,.$$

On considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ Ax''(t) = -Kx(t) \tag{1}$$

de fonction inconnue $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$.

❑ **Q5** – Montrer que $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe $2n$ nombres réels $(a_i)_{1\le i\le n}, (b_i)_{1\le i\le n}$ tels que :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ x(t) = \sum_{i=1}^{n}\big(a_i\cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i\sin(t\sqrt{\lambda_i})\big)e_i\,.$$

En déduire que l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension finie dont on précisera la dimension.

❑ **Q6** – Soient $x, y \in C^1([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. Prouver que

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \frac{d}{dt}(\langle Ax; y\rangle)(t) = \langle Ax'(t); y(t)\rangle + \langle Ax(t); y'(t)\rangle\,.$$

❑ **Q7** – Soit $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle (1). Pour chaque réel $t \ge 0$ on pose, $T(x')(t) = \frac{1}{2}\langle Ax'(t); x'(t)\rangle$ et $U(x)(t) = \frac{1}{2}\langle Kx(t); x(t)\rangle$. Montrer alors que la quantité $T(x')(t) + U(x)(t)$ ne dépend pas de $t \in [0,+\infty[$.

Les solutions de (1) interviennent en physique ; l'objet de la partie III est d'étudier leur comportement quand $t \to +\infty$ dans le cas $n = 2$. Les quantités $T(x')(t)$ et $U(x)(t)$ représentent respectivement une énergie cinétique et une énergie potentielle.

II. Résultats intermédiaires.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On désigne par c_k le réel positif tel que : $c_k \displaystyle\int_0^{2\pi}\big(\frac{1+\cos t}{2}\big)^k dt = 1$, et pour tout réel t on pose $R_k(t) = c_k\big(\dfrac{1+\cos t}{2}\big)^k$.

❑ **Q8** – Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\big(\frac{1+\cos t}{2}\big)^k \sin t\, dt$. En déduire que $c_k \le \frac{k+1}{4}$.

❑ **Q9** – Soit $\epsilon \in]0,\pi[$. On pose : $d_k(\epsilon) = \sup\limits_{t\in[\epsilon, 2\pi-\epsilon]} R_k(t)$. Prouver alors que

$$\lim_{k\to+\infty} d_k(\epsilon) = 0\,.$$

❑ **Q10** – Soit $\epsilon \in]0,\pi[$, et $k \in \mathbb{N}$. Prouver que pour toute $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tout réel u, on a :

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1\,, \text{et}$$

$$\left|\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u)\right| \le 2||h'||\epsilon + 4\pi||h||d_k(\epsilon)\,.$$

(On rappelle que $\int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1 = 1$ et que $||h||$ est défini au début de l'énoncé. Pour établir l'inégalité, on pourra utiliser que $h(u-t_1) = h(u-t_1+2\pi)$ lorsque $t_1 \in [2\pi-\epsilon, 2\pi]$).

III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas $n = 2$ de la partie I.

❑ **Q11** – Soit $x \in C^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation (1). Montrer qu'il existe quatre réels $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ x(t) = \sum_{i=1}^{2} c_i \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i)\, e_i\,. \tag{2}$$

(On rappelle que les deux vecteurs e_1, e_2 sont introduits dans la Question 4).

Dans la suite on fixe deux réels φ_1, φ_2 et on pose :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \theta(t) = (t\sqrt{\lambda_1} + \varphi_1, t\sqrt{\lambda_2} + \varphi_2)\,. \tag{3}$$

Jusqu'à la fin de l'énoncé, on suppose que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose donc *qu'il n'existe pas* d'entiers naturels $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{m_1}{m_2}$.

On désigne par $C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2 + 2\pi)\,.$$

On désigne par $C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f \in C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ telles que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2)$, $\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et définissent toutes deux des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

❑ **Q12** – Soit $f \in C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Prouver que

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in[0,2\pi]^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)|.$$

En déduire que $(\theta_1, \theta_2) \mapsto |f\,(\theta_1, \theta_2)|$ est majorée sur $\mathbb{R}^2$ et atteint sa borne supérieure.

Avec les notations de la question précédente, on posera $||f|| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)|\,.$

Soit $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. On sait que $\theta_2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1$ est continue sur $\mathbb{R}$. On pose alors :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1\right) d\theta_2\,.$$

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *(Théorème Ergodique) Soit $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Alors,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f \circ \theta(t) dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2\,. \tag{4}$$

(On rappelle que $\theta(t)$ est défini dans (3) et que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}$ n'est pas un nombre rationnel).

❑ **Q13** – Soit $j, l \in \mathbb{Z}$. Prouver le Théorème Ergodique dans le cas particulier de la fonction $(\theta_1, \theta_2) \mapsto f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 l}$. (Dans le cas où $(j, l) \neq (0, 0)$ on pourra vérifier que $j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2}$ est non nul puis on pourra calculer séparément chaque membre de (4) dans ce cas particulier).

Dans les trois questions suivantes on fixe un élément quelconque $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \,.$$

❑ **Q14** – Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'il existe $(2k + 1)^2$ nombres complexes $(a_{j,l})_{-k \leq j,l \leq k}$ tels que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $f_k(u, v) = \sum_{-k \leq j,l \leq k} a_{j,l} e^{iuj} e^{ivl}$. Justifier que la fonction f_k vérifie le Théorème Ergodique.

❑ **Q15** – Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $f_k(u, v) - f(u, v)$ comme somme de deux termes et en appliquant la Question 10, prouver que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f_k(u, v) - f(u, v)| \leq 2\epsilon(||\frac{\partial f}{\partial \theta_1}|| + ||\frac{\partial f}{\partial \theta_2}||) + 8\pi ||f|| d_k(\epsilon) \,.$$

On rappelle que $||f||$ est défini juste après la Question 12.

❑ **Q16** – Prouver le Théorème Ergodique pour la fonction f. (On pourra poser $M = 2(||\frac{\partial f}{\partial \theta_1}|| + ||\frac{\partial f}{\partial \theta_2}||) + 8\pi ||f||$. Pour $\epsilon > 0$ donné, on pourra choisir $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_k(\epsilon) < \epsilon$. Ensuite, on pourra appliquer la Question 14 à f_k et considérer $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$:

$$|\frac{1}{T} \int_0^T f_k \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2| < \epsilon \,.)$$

Soient $a, b \in]0, 2\pi[$ tels que $a < b$. On désigne par $\phi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue $2\pi-$périodique définie comme suit. La fonction $\phi_{a,b}$ est nulle sur $[0, a]$ et $[b, 2\pi]$. Pour tout $t \in [a, b]$, $\phi_{a,b}(t) = \sin^2(\frac{\pi}{b-a}(t - a))$.

On rappelle que tout ouvert non vide de $] - 1, 1[^2$ contient un pavé de la forme $] \cos b, \cos a[\times] \cos d, \cos c[$ où $0 < a < b < \pi$ et $0 < c < d < \pi$.

❑ **Q17** – On considère la solution $x(t) = \sum_{i=1}^{2} \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i)\, e_i$ de (1) obtenue en prenant $c_1 = c_2 = 1$ dans (2). Soit Ω un ouvert non vide de $\{ue_1 + ve_2/\ u, v \in] - 1, 1[\}$. Prouver qu'il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $x(t) \in \Omega$. (On pourra raisonner par l'absurde et justifier alors l'existence d'une fonction du type $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \phi_{a,b}(\theta_1)\phi_{c,d}(\theta_2) = \Phi(\theta_1, \theta_2)$ telle que $\Phi(\theta(t))$ est nulle pour tout $t \in [0, +\infty[$).

Fin de l'épreuve.

Le Théorème 1 dit que la moyenne temporelle de la grandeur physique f coincide avec la moyenne spatiale de f. Il s'agit de l'hypothèse ergodique du physicien Boltzmann. La Question 17 est alors une illustration du fait que toute trajectoire du système (hamiltonien) ergodique rencontre tout ouvert de l'espace des phases.