Mathématiques **mercredi 20 avril 2011**
Concours commun Mines-Ponts, première épreuve, corrigé succinct **Édouard Lebeau**[1]

Thèmes abordés. Intégration des fonctions d'une variable (et un peu de celles de deux variables).

Voilà un problème d'analyse très technique qui demande une certaine dextérité dans les calculs, voire de l'astuce. Par bonheur, on y trouve aussi quelques questions de cours déguisées afin de valoriser un peu les candidats travailleurs. Comme c'est arrivé régulièrement ces dernières années, peu de thèmes sont abordés, les calculs sont souvent difficiles et peu guidés, et l'épreuve semble parfois s'adresser à des mathématiciens plus qu'à des futurs ingénieurs. Qui plus est, certains passages sont inutilement compliqués (l'inégalité de la question 10 et la convergence dominée sont superflus pour traiter la question 11).

Une grande qualité de ce sujet toutefois est d'aborder des techniques classiques d'analyse fonctionnelle sans recourir au raisonnements epsilonnesques de type Cesàro.

L'énoncé comporte initialement une imprécision — peu gênante, je pense — à propos de la notation x^λ. Comme chacun sait, ce nombre est défini par la formule $x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \ln(x)}$. Cependant, dans ce sujet, la valeur $x = 0$ est autorisée sous l'hypothèse $\lambda > 0$. Il faut comprendre que la fonction $x \mapsto x^\lambda$, définie *a priori* sur $]0, +\infty[$ seulement, se prolonge par continuité en 0. À ce titre, il est tolérable d'écrire $0^\lambda = 0$ pour $\lambda > 0$.

Question 1. La première inégalité est un exercice classique sur la convexité, ce qui n'est pas surprenant car l'inégalité de Prékopa-Leindler a une parenté avec l'inégalité de Hölder. Le principal écueil est de penser à ne pas prendre le logarithme de 0.

On commence par remarquer que le cas où a ou b est nul se traite immédiatement. Ensuite, on suppose que a et b sont strictement positifs et on écrit

$$a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln(a) + (1-\lambda) \ln(b)).$$

On justifie ensuite que la fonction exponentielle est convexe (sa dérivée est croissante) et on obtient

$$a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln(a) + (1-\lambda) \ln(b)) \leqslant \lambda \exp(\ln(a)) + (1-\lambda) \exp(\ln(b)) = \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Pour la deuxième inégalité, il suffit de justifier que la fonction $x \mapsto x^u$, une fois prolongée par continuité en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, puis qu'elle est convexe (sa dérivée $x \mapsto u x^{u-1}$ est croissante).

Question 2. On commence par traiter le cas (immédiat) où b est nul. Ensuite, on fixe $b \geqslant 0$ et on étudie les variations de la fonction $a \mapsto a^\lambda - (a+b)^\lambda$ (elle est croissante donc majorée par sa limite en 0).

Question 3. On introduit la fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1 : y \mapsto \frac{1}{\mathrm{F}} \int_{-\infty}^{y} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On commence par remarquer que la fonction f_1 diffère d'une constante (additive) de la fonction

$$y \mapsto \frac{1}{\mathrm{F}} \int_{0}^{y} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

La fonction f_1 est donc une primitive de la fonction f/F. À ce titre, la fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est strictement positive.

On constate que la fonction f_1 est strictement croissante, continue, avec pour limites 0 et 1 en $-\infty$ et en $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Autrement dit, tout élément t de $]0, 1[$ possède un unique antécédent $u(t)$ dans $\mathbb{R}$ par f_1.

L'argument est totalement identique pour la deuxième fonction.

Question 4. La fonction u est la réciproque de la bijection que f_1 réalise de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$. Comme f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et la dérivée de f_1 ne s'annule en aucun point, on en déduit que u est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\forall t \in]0, 1[, \qquad u'(t) = \frac{1}{f_1'(u(t))} = \frac{\mathrm{F}}{f(u(t))}.$$

L'argument est absolument le même pour justifier que v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, avec

$$\forall t \in]0, 1[, \qquad v'(t) = \frac{\mathrm{G}}{g(v(t))}.$$

[1] Professeur de mathématiques en PC* au lycée Henri Poincaré, de Nancy. Courriel : `edouardlebeau-ups@yahoo.fr`

Question 5. La fonction u est la réciproque de la bijection que f_1 réalise de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On en déduit que u tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en 1. Il en va de même pour v.

Comme λ et $1-\lambda$ sont strictement positifs, on en déduit que w tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en 1.

Comme de plus la fonction w est continue, on peut conclure, par le théorème des valeurs intermédiaires, que l'ensemble $w(]0,1[)$ est égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

Comme u et v sont continues et strictement croissantes, la fonction w l'est aussi. Elle réalise aussi une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $w' = \lambda u' + (1-\lambda)v'$ est strictement positive donc la fonction w est en fait un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de l'utiliser comme changement de variable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^1 h(w(t))w'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 h\Big(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)\Big)\left(\lambda\frac{\mathrm{F}}{f(u(t))} + (1-\lambda)\frac{\mathrm{G}}{g(v(t))}\right)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout t dans $]0,1[$, on connaît les encadrements

$$0 < f(u(t))^\lambda g(v(t))^{1-\lambda} \leqslant h(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)) \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{\mathrm{F}^\lambda}{f(u(t))^\lambda} \times \frac{\mathrm{G}^{1-\lambda}}{g(v(t))^{1-\lambda}} \leqslant \lambda\frac{\mathrm{F}}{f(u(t))} + (1-\lambda)\frac{\mathrm{G}}{g(v(t))},$$

le deuxième encadrement étant obtenu par application de la première inégalité de la question 1. Par croissance de l'intégrale, on trouve finalement

$$\int_{\mathbb{R}} h(y)\ \mathrm{d}y \geqslant \int_0^1 \mathrm{F}^\lambda \mathrm{G}^{1-\lambda}\ \mathrm{d}t = \mathrm{F}^\lambda \mathrm{G}^{1-\lambda},$$

ce qui est le but de la question.

Question 6. On montre facilement que la fonction $z \mapsto z^2$ est convexe. On obtient donc

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{e}^{-(\lambda x+(1-\lambda)y)^2} \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x^2-(1-\lambda)y^2},$$

et c'est ce qui est attendu.

Question 7. Commençons par remarquer que la fonction Ψ est majorée par 1. Sous l'hypothèse $|z| \leqslant \widehat{\mathrm{M}}$, l'inégalité $\Psi(x) \leqslant \Psi_{\mathrm{M}}(z)$ est donc valable.

Faisons donc maintenant l'hypothèse $|z| > \widehat{\mathrm{M}}$.

L'inégalité triangulaire donne $|z| \leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$ puis l'hypothèse $|y| \leqslant \mathrm{M}$ donne

$$|z| \leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)\mathrm{M} \leqslant \lambda|x| + \widehat{\mathrm{M}}, \qquad \text{puis} \qquad 0 < |z| - \widehat{\mathrm{M}} \leqslant \lambda|x|.$$

On en déduit la majoration $(|z| - \widehat{\mathrm{M}})^2 \leqslant \lambda^2 x^2 \leqslant \Theta^2 x^2$ puis la minoration

$$-\frac{1}{\Theta^2}\left(|z| - \widehat{\mathrm{M}}\right)^2 \geqslant -x^2 \qquad \text{puis} \qquad \Psi_{\mathrm{M}}(z) \geqslant \Psi(x)$$

par croissance de l'exponentielle.

L'inégalité $\Psi(x) \leqslant \Psi_{\mathrm{M}}(z)$ est donc vraie dans tous les cas sous l'hypothèse $|y| \leqslant \mathrm{M}$.

L'autre implication se prouve pareillement.

Question 8. Prenons x et y dans $\mathbb{R}$ et appliquons, comme on nous y invite, l'inégalité de la question 2 :

$$0 \leqslant (f_\epsilon(x))^\lambda = (f(x) + \epsilon\Psi(x))^\lambda \leqslant f(x)^\lambda + \epsilon^\lambda\Psi(x)^\lambda \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant (g_\epsilon(x))^{1-\lambda} \leqslant g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}.$$

Multiplions ces inégalités entre nombres positifs :

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(x)^{1-\lambda} \leqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^\lambda\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}f(x)^\lambda + \epsilon\Psi(x)^\lambda\Psi(y)^{1-\lambda}.$$

Le premier terme est majoré par $h(z)$ par hypothèse. Le quatrième terme est majoré par $\epsilon\Psi(z)$ d'après l'inégalité de la question 6.

Passons à la majoration du deuxième terme. Comme ϵ est dans $]0,1[$, l'inégalité $\Lambda \leqslant \lambda$ donne $\epsilon^\lambda \leqslant \epsilon^\Lambda$.

Dans le cas $|y| \leqslant \mathrm{M}$, on peut majorer le facteur $g(y)^{1-\lambda}$ par $||g||_\infty^{1-\lambda}$ et on peut majorer le facteur $\Psi(x)^\lambda$ par $\Psi_{\mathrm{M}}(z)^\lambda$, d'après la première inégalité de la question 7, puis par $\Psi_{\mathrm{M}}(z)^\Lambda$ car $\Psi_{\mathrm{M}}(z)$ est dans $[0,1]$.

Dans le cas $|y| > \mathrm{M}$, le nombre $g(y)$ est nul.

Dans les deux cas, on peut majorer $g(y)^{1-\lambda}\Psi(x)^\lambda$ par $||g||_\infty^{1-\lambda}(\Psi_\mathrm{M}(z))^\Lambda$.

La majoration du troisième terme s'obtient pareillement.

Il n'y a alors plus qu'à mettre ces majorations bout à bout pour conclure.

Question 9. On reprend les hypothèses et les notations des deux questions précédentes. On introduit de plus la fonction h_ϵ, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule

$$h_\epsilon : t \mapsto h(t) + \epsilon^\Lambda(||f||_\infty^\lambda + ||g||_\infty^{1-\lambda})\Psi_\mathrm{M}(t)^\Lambda + \epsilon\Psi(t).$$

On vient alors de vérifier la majoration

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant h_\epsilon(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Les fonction $f_\epsilon, g_\epsilon, h_\epsilon$ sont à valeurs strictement positives. Il suffit donc de vérifier qu'elles sont intégrables toutes les trois pour leur appliquer l'inégalité démontrée à la question 5.

Ces intégrabilités se démontrent classiquement (les termes en $\Psi(t)$ ou en $\Psi_\mathrm{M}(t)$ sont par exemple négligeables devant $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$).

L'inégalité de la question 5 donne alors

$$\left(\int_\mathbb{R} f_\epsilon(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_\mathbb{R} g_\epsilon(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_\mathbb{R} h_\epsilon(x)\ \mathrm{d}x.$$

On peut maintenant remarquer que la fonction f_ϵ est minorée par la fonction f et que la fonction g_ϵ est minorée par g. En développant l'intégrale de h_ϵ par linéarité, on obtient donc

$$\left(\int_\mathbb{R} f(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_\mathbb{R} g(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_\mathbb{R} h(x)\ \mathrm{d}x + \epsilon^\Lambda \mathrm{C}_1 + \epsilon \mathrm{C}_2,$$

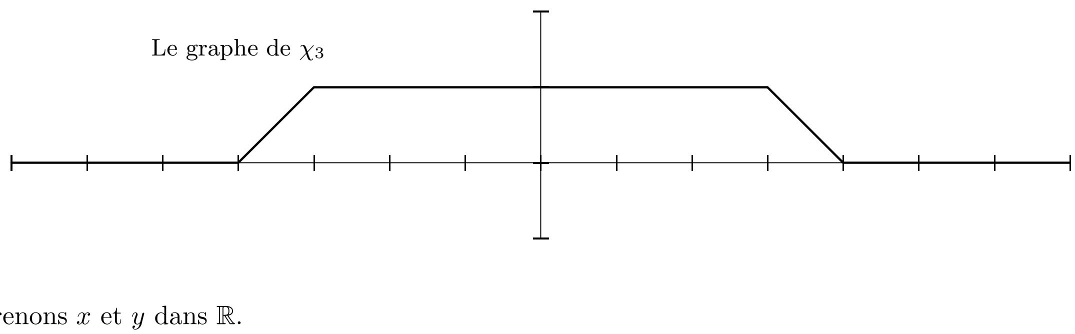
où C_1 et C_2 sont les constantes réelles définies par

$$\mathrm{C}_1 = (||f||_\infty^\lambda + ||g||_\infty^{1-\lambda})\int_\mathbb{R} \Psi_\mathrm{M}(x)^\Lambda\ \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_2 = \int_\mathbb{R} \Psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

La dernière majoration a été obtenue pour tout ϵ dans $]0, 1[$. Il est donc possible de faire tendre ϵ vers 0, ce qui donne finalement la majoration attendue :

$$\left(\int_\mathbb{R} f(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_\mathbb{R} g(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_\mathbb{R} h(x)\ \mathrm{d}x.$$

Question 10. Il me paraît judicieux de tracer le graphe de la fonction χ_n pour illustrer la construction.



Prenons x et y dans $\mathbb{R}$.

Supposons d'abord que x et y sont dans $[-n-1, n+1]$. Comme les intervalles sont des — les ! — parties convexes de $\mathbb{R}$, le nombre $\lambda x + (1-\lambda)y$ est également dans cet intervalle.

On connaît alors les inégalités $0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \chi_n(y) \leqslant 1$ ainsi que l'égalité $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1$, si bien que la majoration $\chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)$ est valable.

Maintenant, si l'un au moins des nombres x et y n'est pas dans $[-n-1, n+1]$, alors le produit $\chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda}$ est nul. Comme le nombre $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)$ est positif, l'inégalité attendue est vraie aussi dans ce cas.

Appendice. Démontrons tout de même l'encadrement $0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1$.

Déjà, c'est connu si x est dans $[-n, n]$ ou en dehors de $[-n-1, n+1]$ puisque $\chi_n(x)$ vaut 0 ou 1 dans ce cas.

Maintenant, sur le segment $[n, n+1]$, la fonction χ_n est affine donc monotone. Ses valeurs aux bornes sont 0 et 1 donc les valeurs prises sur cet intervalles sont comprises entre 0 et 1.

Idem sur le segment $[-n-1, -n]$.

Question 11. Pour tout entier n strictement positif, posons

$$f_n = f \times \chi_n \qquad \text{et} \qquad g_n = g \times \chi_n.$$

L'énoncé semble nous inviter à introduire aussi $h_n = h \times \chi_{n+1}$ mais je n'en vois pas l'intérêt.

La majoration $\chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant 1$, plus simple que celle de la question précédente, est bien suffisante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f_n(x)^\lambda g_n(x)^{1-\lambda} \leqslant f(x)^\lambda g(x)^{1-\lambda} \leqslant h(\lambda x + (1-\lambda) y).$$

On remarque de plus que les fonctions f_n et g_n sont continues et nulles en dehors d'un segment, donc intégrables sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité P-L de la question 9 au triplet (f_n, g_n, h) :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\ \mathrm{d}x.$$

Remarquons maintenant que la fonction f_n coïncide avec f sur $[-n, n]$ et qu'elle est positive en dehors de ce segment. De même, la fonction g_n coïncide avec g sur $[-n, n]$ et est positive en dehors de ce segment. On trouve donc

$$\left(\int_{-n}^{n} f(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{-n}^{n} g(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}.$$

On obtient donc la majoration suivante pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\left(\int_{-n}^{n} f(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{-n}^{n} g(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\ \mathrm{d}x.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient finalement

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\ \mathrm{d}x.$$

L'inégalité de Prékopa et Leindler est donc démontrée en toute généralité pour les fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$ (et le théorème de convergence dominée n'est pas utile).

Question 12. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. L'inégalité triangulaire pour la norme N et son caractère positivement homogène donnent

$$\mathrm{N}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \mathrm{N}(\lambda x) + \mathrm{N}((1-\lambda)y) = \lambda \mathrm{N}(x) + (1-\lambda)\mathrm{N}(y).$$

La convexité de la fonction $u \mapsto u^2$ donne ensuite

$$\mathrm{N}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Big(\lambda \mathrm{N}(x) + (1-\lambda)\mathrm{N}(y)\Big)^2 \leqslant \lambda \mathrm{N}(x)^2 + (1-\lambda)\mathrm{N}(y)^2.$$

On change le signe, on utilise la croissance de l'exponentielle et le tour est joué.

Question 13. Pour tout x réel, posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}y, \qquad \mathrm{G}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\ \mathrm{d}y, \qquad \mathrm{H}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\ \mathrm{d}y.$$

L'inégalité qu'on nous demande de vérifier est en fait l'inégalité P-L de la première partie pour le triplet $(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H})$. Il suffit donc de vérifier que les fonctions $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ sont continues, intégrables et qu'elles vérifient l'inégalité

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{H}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \mathrm{F}(x_1)^\lambda \mathrm{G}(x_2)^{1-\lambda}.$$

Commençons par prouver que F est continue (pour G et H, l'argumentation est la même).

Considérons $\mathrm{M} > 0$ tel que f soit nulle en dehors du carré $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]^2$. On trouve donc $\mathrm{F}(x) = \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} f(x,y)\ \mathrm{d}y$ pour tout x réel. De plus, comme la fonction f est continue sur le compact $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]^2$, elle est bornée sur ce compact (donc sur $\mathbb{R}^2$).

(i) Pour tout y dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue et intégrable sur le segment $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$.

(iii) On connaît la domination $\forall(x,y) \in \times\mathbb{R}\times[-\mathrm{M},\mathrm{M}],\ |f(x,y)| \leqslant ||f||_\infty$. Or la fonction constante $y \mapsto ||f||_\infty$ est continue est intégrable sur $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$.

Les points (i), (ii) et (iii) permettent d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, qui donne la continuité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Le fait que la fonction F soit intégrable sur $\mathbb{R}$ est une conséquence de ce qui est admis dans le préambule de la partie III. Idem pour G et H.

Il nous reste à prouver l'inégalité sur $\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H}$. Pour cela, on introduit les fonctions

$$f_0 : y \mapsto f(x_1,y), \qquad g_0 : y \mapsto g(x_2,y), \qquad h_0 : y \mapsto h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y).$$

L'hypothèse de l'énoncé permet d'écrire

$$\forall(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant f(x_1,y_1)^\lambda g(x_2,y_2)^{1-\lambda},$$

ce qui se réécrit

$$\forall(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad h_0(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant f_0(y_1)^\lambda g_0(y_2)^{1-\lambda}.$$

Bien sûr, les fonctions f_0, g_0, h_0 sont continues, positives et intégrables sur $\mathbb{R}$. On peut donc leur appliquer l'inégalité P-L de la première partie :

$$\int_\mathbb{R} h_0(y)\ \mathrm{d}y \geqslant \left(\int_\mathbb{R} f_0(y)\ \mathrm{d}y\right)^\lambda \left(\int_\mathbb{R} g_0(y)\ \mathrm{d}y\right)^{1-\lambda},$$

ce qui se réécrit enfin $\mathrm{H}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \mathrm{F}(x_1)^\lambda \mathrm{G}(x_2)^{1-\lambda}$.

Il est finalement possible maintenant d'appliquer l'inégalité P-L au triplet $(\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H})$, ce qui donne alors exactement l'inégalité P-L bidimensionnelle attendue.

Remarque. Comme on peut s'en douter, le raisonnement effectué dans cette question peut se généraliser pour prouver par récurrence une inégalité analogue pour les fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^n$.

Question 14. La partie $\mathcal{A}$ est bornée. Il est donc possible de choisir un élément M de $]0,+\infty[$ tel que $\mathcal{A}$ soit incluse dans le carré $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]\times[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$.

L'ensemble dont on nous propose la borne supérieure est alors une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ majorée par l'intégrale $\iint_{[-\mathrm{M},\mathrm{M}]^2} 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, c'est-à-dire par $4\mathrm{M}^2$.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure finie. L'existence du nombre $\mathrm{V}(\mathcal{A})$ est alors justifiée.

Question 15. Pour toute fonction f de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, on peut écrire la majoration

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \leqslant \iint_{[a,b]\times[c,d]} 1\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = (b-a)(d-c).$$

Prenons maintenant $\varepsilon > 0$ avec les conditions $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ et $\varepsilon < \frac{d-c}{2}$. Considérons, comme à la question 10, la fonction ϕ qui vaut 1 sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, qui vaut 0 en dehors de $[a,b]$ et qui est affine sur chacun des segments $[a,a+\varepsilon]$ et $[b-\varepsilon,b]$. On construit de même la fonction φ analogue sur le segment $[c,d]$.

On peut remarquer que la fonction $f_\varepsilon : (x,y) \mapsto \phi(x)\varphi(y)$ est un élément de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ et on trouve la minoration

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \geqslant \iint_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\times[c+\varepsilon,d-\varepsilon]} 1\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = (b-a-2\varepsilon)(d-c-2\varepsilon).$$

On en déduit que l'encadrement suivant a lieu pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :

$$(b-a-2\varepsilon)(d-c-2\varepsilon) \leqslant \mathrm{V}(\mathcal{A}) \leqslant (b-a)(d-c).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'égalité $\mathrm{V}(\mathcal{A}) = (b-a)(d-c)$.

La lettre V a été manifestement choisie pour le mot *volume*, qui est en fait plutôt l'aire dans le cas présent de la dimension 2.

Question 16. On prend f quelconque dans $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ et g quelconque dans $\mathrm{C}(\mathcal{B})$. On leur associe la fonction h comme dans l'énoncé, qui est alors un élément de $\mathrm{C}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B})$. L'inégalité P-L de la question 13 permet alors d'écrire l'inégalité

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \geqslant \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)^{\lambda} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)^{1-\lambda}.$$

L'intégrale de gauche est majorée par $\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B})$. On obtient donc

$$\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)^{\lambda} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)^{1-\lambda}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout élément f de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant (\mathrm{V}(\mathcal{A}))^{\lambda} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)^{1-\lambda}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout élément g de $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, on obtient finalement l'inégalité demandée :

$$\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant (\mathrm{V}(\mathcal{A}))^{\lambda}\,(\mathrm{V}(\mathcal{B}))^{1-\lambda}.$$

Question 17. On fait la même chose qu'à la question précédente en remplaçant les fonctions f, g, h par $f\times u, g\times u, h\times u$.
