

# Théorème de la limite centrale un corrigé

## 1 Préliminaires.

**Q.1.** On peut traiter simultanément les deux premiers points avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soient  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $g \in C_0(\mathbb{R})$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(x-t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)g(x-t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t) = \phi(t)$ .  $\phi$  est indépendante de  $x$  et c'est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  (elle est positive et son intégrale existe et vaut  $\|g\|_\infty$  puisque  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ).

Le théorème s'applique et indique que pour tout  $x, t \mapsto f(t)g(x-t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (et est donc a fortiori d'intégrale convergente) et  $f * g$  est continue.

$$f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Le changement de variable  $u = x - t$  montre que

$$f * g(x) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u) du = g * f(x)$$

**Q.2.** Soit  $(x_n)$  une suite réelle de limite  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Posons  $u_n = f * g(x_n)$ ; en notant  $h_n : t \mapsto f(t)g(x_n - t)$ , on a

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt$$

Montrons que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout  $n, h_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $(h_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle (car  $f$  est bornée et  $g$  de limite nulle en  $+\infty$  et  $-\infty$ ). La limite simple est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}, |h_n(t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ . Le majorant est indépendant de  $n$  et est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (comme en question 1).

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f * g(x_n) = 0$$

Par caractérisation séquentielle des limites, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f * g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g * f(x) = 0$$

**Q.3.** Soient  $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et on peut ainsi reprendre la question 1 pour voir que

$$f * g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}$$

$f$  et  $g$  étant positives, on a immédiatement

$$f * g \text{ est positive sur } \mathbb{R}$$

On a aussi  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f * g(x) \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \|g\|_\infty$  et donc

$$f * g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

Il nous reste à montrer que  $f * g$  a une intégrale sur  $\mathbb{R}$  qui converge et qui vaut 1. Pour cela, et comme l'énoncé nous le propose, on va utiliser le théorème de Fubini avec  $F : (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$  qui est continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  (théorèmes généraux à partir des continuités de  $f$  et de  $g$ ) en vérifiant uniquement deux des hypothèses.

1) Pour tout réel  $x, |F(x, t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$  et comme  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (positive d'intégrale convergente),  $t \mapsto F(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $t, |F(x, t)| \leq \|f\|_\infty g(x-t)$ . Le changement de variable  $u = x - t$  donne  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = 1$  et donc  $x \mapsto g(x-t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (positive d'intégrale convergente),  $x \mapsto F(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

3) Pour tout réel  $t$  (avec la positivité de  $F$  et avec le changement de variable évoqué dans le premier point)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, t)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dx = f(t)$$

$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, t)| dx$  est donc intégrable sur  $\mathbb{R}$  et son intégrale vaut  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .  
Le théorème de Fubini s'applique et donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dx \right) dt = 1$$

On a ainsi le dernier point attendu et

$$f * g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

## 2 Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$ .

**Q.4.** Soit  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ ;

$$\forall x \in \mathbb{R}, |T_f(u)(x)| = |f * u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_{\infty} f(t) dt = \|u\|_{\infty}$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et un passage à la borne supérieure donne

$$\|T_f(u)\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}$$

**Q.5.** Soient  $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ ; avec la commutativité et l'associativité de  $*$ , on a

$$T_f T_g(u) = f * T_g(u) = f * (g * u) = (g * u) * f = g * (u * f) = g * (f * u) = T_g T_f(u)$$

**Q.6.** Soit  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ ; on a (avec la question précédente pour la seconde relation)

$$\begin{aligned} T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{f_1} T_{g_2}(u) &= T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) \\ T_{f_1} T_{g_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) &= T_{g_2} T_{f_1}(u) - T_{g_2} T_{g_1}(u) = T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)) \end{aligned}$$

On passe à la norme infinie, on utilise la question 4, puis on somme et on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\begin{aligned} \|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} &\leq \|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{f_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_1} T_{g_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} \\ &\leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_{\infty} \end{aligned}$$

**Q.7.** On remarque tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (T_f)^n(u) = f * f * \dots * f * u = f^{*n} * u = T_{f^{*n}}(u)$$

On prouve alors le résultat annoncé par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Initialisation : le résultat est immédiat pour  $n = 1$  (on a même une égalité).
- Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que le résultat est vrai au rang  $n$ . La question précédente donne (avec  $f_1 = f$ ,  $f_2 = f^{*n}$ ,  $g_1 = g$  et  $g_2 = g^{*n}$ )

$$\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}(u)\|_{\infty} \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} + \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_{\infty} \leq (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty}$$

On conclut que le résultat est vrai au rang  $n + 1$ .

### 3 Lois normales.

**Q.8.**  $g_h$  est continue positive et bornée (majorée par  $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ ). C'est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  (seuls problèmes aux voisinages des infinis où  $g_h$  est négligeable devant  $1/x^2$  par croissances comparées). De plus, le changement de variable  $u = \frac{x}{h}$  donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) du = 1$$

On en déduit que

$$\forall h > 0, g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$x \mapsto xg_h(x)$  et  $x \mapsto x^2g_h(x)$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$  (seuls problèmes aux voisinages des infinis où les fonctions sont négligeables devant  $1/x^2$  par croissances comparées). Les intégrales proposées existent donc. On a directement, par imparité de la fonction (et sachant que l'intégrale existe)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg_h(x) dx = 0$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_a^b x^2g_h(x) dx = \left[ -\frac{hx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_a^b + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx = \left[ -\frac{hx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_a^b + h^2 \int_a^b g_h(x) dx$$

En faisant tendre  $a$  vers  $-\infty$  et  $b$  vers  $+\infty$  (les intégrales existent) on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g_h(x) dx = h^2$$

**Q.9.** Comme on l'a remarqué en question 7,

$$\left( T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} \right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$$

Par ailleurs, on a (récurrence quasi immédiate avec le résultat admis par l'énoncé)

$$g_{h_1} * g_{h_2} * \cdots * g_{h_n} = g_h \quad \text{avec} \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

et en particulier  $(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n} = g_h$  ce qui donne

$$\left( T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} \right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} = T_{g_h}$$

### 4 Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Q.10.** Montrons par récurrence sur  $k$  que la propriété

$$\exists P_{k,h}, \text{ polynôme de degré } k, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k} g_h(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

- Initialisation : le résultat est vrai au rang 0 avec  $P_{0,h} = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$  qui est un polynôme constant non nul et donc de degré 0.

- Hérédité : supposons le résultat acquis à un rang  $k - 1 \geq 0$ . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k} g_h(x) = (P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Posons  $P_{k,h}(x) = P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)$ . C'est un polynôme de degré  $k$  (somme d'un polynôme de degré  $k$  et d'un de degré  $\leq k - 1$ ) qui vérifie la propriété voulue.

**Q.11.** La fonction  $s_{k,h} : u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de limite nulle aux infinis (croissances comparées). C'est donc une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$ . On a alors,

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \|s_{k,h}\|_{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$$

On suppose désormais que  $|x| \leq a$ . Par seconde forme de l'inégalité triangulaire indique que  $|x-t| \geq |t| - |x| \geq |t| - a$ . Si  $|t| \geq a$ , ces termes sont positifs et par croissance de  $u \mapsto u^2$  sur  $\mathbb{R}^+$  on a donc  $(x-t)^2 \geq (|t| - a)^2$ . On en déduit que pour  $|t| \geq a$ ,  $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}$ . Par ailleurs, pour  $|t| < a$ , on a  $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1$ . Posons donc

$$\phi_k(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \|s_{k,h}\|_{\infty} & \text{si } |t| < a \\ \|s_{k,h}\|_{\infty} e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

On obtient une fonction continue par morceaux, négligeable devant  $1/t^2$  aux voisinages des infinis et donc intégrable sur  $\mathbb{R}$  et telle que

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

$\phi_k$  ne dépend effectivement que de  $h$ ,  $k$  et  $a$ .

**Q.12.** Soit  $h > 0$  et soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ . On veut appliquer le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout réel  $x$ ,  $t \mapsto g_h(x-t)u(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (cela a été prouvé en question 1).
- Pour tout réel  $t$ ,  $x \mapsto g_h(x-t)u(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée  $k$ -ième est la fonction  $x \mapsto P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t)$ .
- Pour tout segment  $[-a, a]$ , pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , la question 11 donne une domination de la dérivée  $k$ -ième précédente par une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  et cette domination est uniforme vis à vis de  $x \in [-a, a]$ .

$T_{g_h}(u)$  est alors de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $[-a, a]$  pour tout  $a$  et est donc de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t) dt$$

**Q.13.** Soit  $f_{k,h} : u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{2h^2}}$ . Les fonctions  $f_{k,h}$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$  (continues et dominées par  $1/u^2$  au voisinage des infinis). Comme en questions 1 et 2, on peut écrire (l'hypothèse  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  peut être remplacée par l'intégrabilité de  $f$  et les quantités écrites continuent à exister et à vérifier les propriétés des questions 1 et 2).

$$\frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u)(x) = f_{k,h} * u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

On a donc montré que

$$T_{g_h}(u) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

**Q.14.** Soit  $\alpha > 0$ . Si  $t \geq \alpha$  alors  $t^2 \geq t\alpha$  et donc

$$\forall x \geq \alpha, 0 \leq g_h(t) \leq \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}}$$

Les fonctions considérées étant intégrables au voisinage de  $+\infty$ , on peut intégrer les inégalités précédentes et on obtient

$$0 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt \leq \left[ -\frac{2h^2}{\alpha h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}} \right]_{\alpha}^{+\infty} = \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2h^2}} \leq \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = 0$$

La fonction  $g_h$  étant paire, on en déduit aussi que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = 0$$

**Q.15.** Soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ . On va prouver le résultat demandé en revenant à la définition des limites. On se donne donc  $\varepsilon > 0$ . La propriété admise nous donne  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La question précédente ( $\alpha$  est maintenant connu et fixé) donne  $r > 0$  tel que

$$\forall h \in ]0, r], 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_{\infty}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_{\infty}}$$

Soit  $h \in ]0, r]$  et  $x \in \mathbb{R}$  quelconque. On a ( $g_h$  étant d'intégrale égale à 1)

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t) - u(x)) dt$$

On passe au module, on majore par positivité de l'intégrale et on utilise la relation de Chasles pour obtenir (en majorant grossièrement  $|u(x-t) - u(x)|$  par  $2\|u\|_{\infty}$ )

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)| dt + 2\|u\|_{\infty} \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \right)$$

On en déduit alors que

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Le majorant étant indépendant de  $x$ , on a  $\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \varepsilon$ . On a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 / \forall h \in ]0, r], \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} = 0$$

**Q.16.** Soit  $u \in C_0(\mathbb{R})$ . Ecrivons que, pour tout  $h > 0$ .

$$T_{f_n}(u) - T_f(u) = (T_{f_n}(u) - T_{f_n}T_{g_h}(u)) + (T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)) + (T_fT_{g_h}(u) - T_f(u))$$

On passe à la norme infinie et on utilise l'inégalité triangulaire et la question 4 pour obtenir

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty + \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty$$

On revient à la définition des limites pour répondre à la question posée. Soit  $\varepsilon > 0$ ; la question précédente nous permet de trouver un  $h > 0$  tel que  $\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .  $h$  étant fixé,  $T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et l'hypothèse faite donne un  $n_0$  tel que si  $n \geq n_0$  on a  $\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . On a ainsi

$$\forall n \geq n_0, \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \varepsilon$$

et on a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Ceci étant vrai pour tout  $u \in C_0(\mathbb{R})$ ,

$(f_n)$  converge faiblement vers  $f$

**Q.17.**  $x \in \mathbb{R}$  est ici fixé. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2}u''(x) + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{u''(x)}{2}$$

Comme  $f_n$  est d'intégrale égale à 1, on a

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t) - u(x)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t) - u(x)}{t^2} dt \quad (1)$$

Comme  $f_n^\#$  est d'intégrale égale à 1 on a aussi

$$-\frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u''(x)}{2} f_n^\#(t) dt \quad (2)$$

Enfin, comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) = 0$ , on a aussi (poser  $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$ )  $\int_{-\infty}^{+\infty} v f_n(v) dv = 0$  et donc

$$0 = n\sqrt{n}u'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{t} f_n^\#(t) dt \quad (3)$$

En sommant les relations (1), (2) et (3), on obtient

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x) \right) f_n^\#(t) dt$$

**Q.18.** Soit  $\alpha > 0$  quelconque. On a (en posant  $v = \sqrt{nt}$ )

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = \int_{\alpha}^{+\infty} nt^2 \sqrt{n} f(\sqrt{nt}) dt = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} v^2 f(v) dv$$

Comme l'intégrale de  $v \mapsto v^2 f(v)$  existe sur  $\mathbb{R}$ , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = 0 \quad (4)$$

et de façon similaire,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t) dt = 0 \quad (5)$$

Posons maintenant  $g(x, t) = \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)$ . L'inégalité de Taylor-Lagrange donne ( $u^3$  est bornée puisque continue et de limite nulle aux infinis)

$$|u(x-t) - u(x) - tu'(x) - \frac{t^2}{2}u''(x)| \leq \frac{|t|^3}{6} \|u^{(3)}\|_\infty$$

et on a donc

$$|g(x, t)| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} |t|$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a alors, avec la relation précédente (et puisque  $f_n^\#$  est positive et d'intégrale égale à 1)

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t| f_n^\#(t) dt \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon$$

Les relations (4) et (5) avec  $\alpha = \varepsilon$  donnent un rang  $n_0$  à partir duquel les intégrales sont inférieures ou égales à  $\varepsilon^3$ . De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall |t| \geq \varepsilon, |g(x, t)| \leq \frac{1}{2} \|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}$$

et on a donc, pour  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| &\leq \left( \frac{1}{2} \|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon} \right) \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n^\#(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon^3}{2} \|u''\|_\infty + 2\|u\|_\infty \varepsilon + \|u'\|_\infty \varepsilon^2 \end{aligned}$$

On procède de même avec l'intégrale entre  $-\infty$  et  $-\alpha$ . On a alors

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon + \varepsilon^3 \|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty \varepsilon + 2\|u'\|_\infty \varepsilon^2$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et on peut passer à la borne supérieure. Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\forall n \geq n_0, \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon + \varepsilon^3 \|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty \varepsilon + 2\|u'\|_\infty \varepsilon^2$$

le majorant est de limite nulle quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty = 0$$

**Q.19.** Avec les questions 9 puis 7, on a

$$\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}^n(u)\|_\infty \leq n \|T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)\|_\infty$$

On écrit alors que  $n(T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)) = A_n - B_n$  avec

$$A_n = n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \quad \text{et} \quad B_n = n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''$$

La question précédente donne  $\|A_n\|_\infty \rightarrow 0$  mais aussi  $\|B_n\|_\infty \rightarrow 0$  car c'est un cas particulier en choisissant  $f = g_1$  (qui vérifie les bonnes hypothèses). On en déduit que  $\|A_n - B_n\|_\infty \rightarrow 0$ , ce qu'il fallait prouver :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

Comme  $T_{f_n}^n(u) = T_{f_n^{*n}}$ , on se retrouve exactement dans le cadre de la question 16 pour conclure que  $(f_n^{*n})$  converge faiblement vers  $g_1$ .