Mines, Ponts PC, 2007

Maths II

I. 1. Pour tout x réel, pour tout $n \geq 1$, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi la série $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2. Comme $t \geq 0$, et $|u| < 1$, $e^t - u \neq 0$. Aussi $J : t \mapsto \dfrac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives.

- au voisinage de 0, $J(t) \sim \dfrac{1}{(1-u)t^{1-\gamma}}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $1-\gamma < 1$, ou $\gamma > 0$.
- au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 J(t) = 0$ (grâce à e^{-t}). Donc J est intégrable sur $[A, +\infty[$ quelque soit γ.

En conclusion J est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\gamma > 0$.

I.3. Comme $|u| < 1$, pour tout $t > 0$, $|ue^{-t}| < 1$. Un calcul immédiat de somme partielle de série géométrique donne

$$R_N(t,u) = \frac{u^{N+1}e^{-Nt}}{e^t - u} t^{\alpha-1}$$

I.4. $|R_N(t,u)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u}$ qui est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$ (question I.2). Donc $R_N(t,u)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

De plus $|R_N(t,u)| \leq \dfrac{e^{-Nt}t^{\alpha-1}}{e^t - u}$, quantité qui tend simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$, lorsque N tend vers $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(t,u)dt = 0$.

I.5. On a

$$\int_0^{+\infty} R_N(t,u)dt = \int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} (ue^{-t})^n t^{\alpha-1}$$

Or, par existence de chaque intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} (ue^{-t})^n t^{\alpha-1} = \sum_{n=1}^{N} u^n \int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}$$

et le changement de variable linéaire $nt = x$ qui est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1} = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

Finalement, par la limite obtenue à la question précédente, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}$$

I.6. Avec ce qui est admis, il vient

$$\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n^{\alpha}} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}$$

Donc

$$S_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Im\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-ix}-1}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\Im\left(\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-ix}-1}\right)$$

Or

$$\frac{1}{e^{t-ix}-1} = \frac{e^{t+ix}-1}{e^{2t}-2e^t\cos x+1}$$

ce qui entraîne que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{e^{t-ix}-1}\right) = \frac{e^t\sin x}{e^{2t}-2e^t\cos x+1} = \frac{\sin x}{2}\times\frac{1}{\cosh t-\cos x}$$

I.7. On écrit que $\dfrac{1}{\cosh t - u} = \dfrac{1}{\cosh t}\times\dfrac{1}{1-\frac{u}{\cosh t}}$, et comme $\left|\dfrac{u}{\cosh t}\right| < 1$, on a

$$\frac{1}{\cosh t - u} = \frac{1}{\cosh t}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{(\cosh t)^n}$$

La série de fonctions de t, $\sum\dfrac{u^n}{(\cosh t)^n}$ converge normalement sur le compact $[0, M]$ (car $|u| < 1$ et $\cosh t \geq 1$), donc la série $\sum t^{\alpha-1}\dfrac{u^n}{(\cosh t)^n}$ également. Ainsi

$$\int_0^M\frac{t^{\alpha-1}}{\cosh t - u} = \int_0^M\left(t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{(\cosh t)^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}u^n\int_0^M\frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}}$$

I.8. Notons $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x\frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}}$. On a

$$0 \leq |u|^n f_n(x) \leq |u|^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} \leq |u|^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)} = C|u|^n$$

Ceci montre la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions de la variable x, $\sum u^n f_n(x)$. Comme $+\infty$ est dans l'adhérence de $\mathbb{R}^+$, le théorème de la double limite donne que

$$\lim_{x\to+\infty}\sum u^n f_n(x) = \sum\lim_{x\to+\infty}u^n f_n(x)$$

ce qui est le résultat demandé.

I.9. Pour $x \neq 2k\pi$, on a

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\cosh t-\cos x}$$

et pour $x \neq k\pi$, en posant $\cos x = u \in]-1, 1[$, il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\cosh t - \cos x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\cos x)^n\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}}$$

Donc

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}G_\alpha(\cos x)$$

II.10. Par hypothèse de cette question, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \leq s < \delta$, alors $|B(s) - as^{\lambda-1}| < \varepsilon a s^{\lambda-1}$.
Donc, sous les mêmes conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|(B(s) - as^{\lambda-1})e^{-ns}| < \varepsilon a s^{\lambda-1}e^{-ns}$$

et

$$\int_0^\delta |(B(s) - as^{\lambda-1})|e^{-ns} < \varepsilon a \int_0^\delta s^{\lambda-1}e^{n s}ds$$

Le changement de variable linéaire $u = ns$ donne

$$\int_0^\delta s^{\lambda-1}e^{n s}ds = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda}\int_0^{n\delta} u^{\lambda-1}e^{-u}du \leq \frac{\varepsilon a}{n^\lambda}\int_0^{+\infty} u^{\lambda-1}e^{-u}du = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$$

II.11. Pour $n > 1$, $s \to |B(s) - as^{\lambda-1}|e^{-ns}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ (hypothèse de la partie II et intégrabilité de $s \to s^{\lambda-1}e^{-ns}$) et

$$\int_\delta^{+\infty} |B(s) - as^{\lambda-1}|e^{-ns} \leq \int_\delta^{+\infty} |B(s) - as^{\lambda-1}|e^{-s} \times e^{-(n-1)\delta} = C(\delta)e^{-(n-1)\delta}$$

II.12. On écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} = I_1 + I_2$.
On sait que $|I_1| < \varepsilon\dfrac{a\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}$, et que pour tout $n > 1$, $|I_2| \leq C(\delta)e^{-(n-1)\delta}$.
Lorsque n tend vers $+\infty$, $n^\lambda C(\delta)e^{-(n-1)\delta} \to 0$, donc $I_2 = o(1/n^\lambda)$, ce qui termine cette question.

II.13. Lorsque l'on pose $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = e^s$, un calcul (presque immédiat) donne $t = \ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1})$.
Ainsi

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}}e^{-ns}ds$$

après avoir vérifié que le changement de variables $s = \ln(\cosh t)$ est un C^1 difféormorphisme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.14. Il suffit de faire un développement limité de l'exponentielle. Il vient

$$e^s + \sqrt{e^{2s} - 1} = 1 + \sqrt{2s} + s + o(s^{3/2})$$

et

$$\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) = \sqrt{2s} + 2s + o(s^{3/2})$$

Ce qui donne que $B(s) \sim \dfrac{(\sqrt{2s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2s}} \sim 2^{\alpha/2-1}s^{\alpha/2-1}$.

II.15. Finalement,

$$a_n = \int_0^{+\infty} B(s)e^{-ns}ds \sim \frac{a\Gamma(\alpha/2)}{n^{\alpha/2}}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n n^{\alpha/2} = a\Gamma(\alpha/2) = 2^{\alpha/2-1}\Gamma(\alpha/2)$.