Corrigé de Mines-Ponts 2007 PC math 1

I Préliminaires

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $\sum_{j=1}^{m} |MN(i,j)| = \sum_{j=1}^{m} |\sum_{k=1}^{r} M(i,k)N(k,j)| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} |M(i,k)||N(k,j)| = \sum_{k=1}^{r} |M(i,k)| \sum_{j=1}^{m} |N(k,j)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |M(i,k)| \times ||N|| \leqslant ||M|| \times ||N||$. On a donc $||MN|| \leqslant ||M|| \times ||N||$.

2. $\sum_{j=1}^{n} |P(i,j)| = \sum_{j=1}^{n} P(i,j) = 1$ puisque P est positive et $PJ_n = J_n$. On a donc $||P|| = 1$.

3. On montre la propriété par récurrence. Elle est vraie pour $k = 1$ puisque P est stochastique. Supposons la vraie pour k. $P^{k+1} = P^k \times P$ est à coefficients positifs puisque P^k et P le sont. De plus, $P^{k+1}J_n = P^k \times PJ_n = P^k \times J_n = J_n$. P^{k+1} est donc bien stochastique.

II Pseudo-inverse

4. D'une part $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$; d'autre part $a = aa'a = a^2a'$ entraine que $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a^2)$. On a donc $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$ d'où rang(a)=rang(a^2).

5. Puisque $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$ et rang(a)=rang(a^2) on déduit que $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$: $ax \in \mathrm{Im}(a)$ entraine qu'il existe y tel que $ax = a^2y$; en posant $z = x - ay$ on obtient que $z \in \mathrm{Ker}(a)$ d'où $x = ay + z \in \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$. Le théorème du rang entraine alors que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$.

6. Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$; la matrice de $a \neq 0$ dans cette base s'écrit par blocs: $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $\mathrm{Im}(a)$ est stable par a. La matrice B est inversible puisque la restriction de a à $\mathrm{Im}(a)$, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(a)$, est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(a)$ sur $\mathrm{Im}(a)$. Si W est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$ on a bien $A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$.

7. Définissons $A' = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$. On vérifie que $AA' = A'A = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$, puis que $AA'A = A$ et $A'AA' = A'$: A' est un pseudo-inverse de A.

8. Puisque a' commute avec a, $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a'. La matrice de a' dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit donc: $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, d'où $A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} W^{-1}$. De $A' = A'AA'$ on déduit par des produits par blocs: $D = DBD$ et $E = E \times 0 \times E = 0$.

9. $(aa')^2 = a \times a'aa' = a \times a'$ donc $aa' = a'a$ est bien un projecteur. $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a'a)$ et $\mathrm{Ker}(a'a) \subset \mathrm{Ker}(aa'a) = \mathrm{Ker}(a)$ donc $\mathrm{Ker}(aa') = \mathrm{Ker}(a)$. $\mathrm{Im}(aa') \subset \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(aa'a) \subset \mathrm{Im}(aa')$ donc $\mathrm{Im}(aa') = \mathrm{Im}(a)$. La matrice du projecteur aa' dans la base $\mathcal{B}'$ adaptée à $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(aa') \oplus \mathrm{Ker}(aa')$ est donc $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ égale aussi à $W^{-1}AA'W$.

10. $W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entraine $BD = I_r$ d'où $D = B^{-1}$; il y a bien unicité du pseudo-inverse.

III Calcul de X_∞

11. Sans intérêt.

12. Sans intérêt.

13. Le théorème 1 entraine que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(I_n - P)$ est de dimension 1 et est engendré par J_n (puisque $PJ_n = J_n$) donc rang(a)=$n-1$; il donne aussi $X_\infty A = X_\infty - X_\infty P = 0$ donc pour tout X, $X_\infty AX = 0$: $\mathrm{Im}(a)$ est donc inclus dans l'hyperplan d'équation $X_\infty Y = 0$, donc est égal à cet hyperplan (rang(a)=$n-1$); puisque $X_\infty J_n = 1$ (X_∞ est une ligne stochastique), J_n n'est pas dans $\mathrm{Im}(a)$ et donc $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Ker}(a) = \{0\}$ d'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(a) = a(\mathbb{R}^n) = a(\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)) = a^2(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Im}(a^2)$.

14. On fait une démonstration par récurrence. C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - (I_n - C))C^{-1}$. Supposons l'égalité vraie pour k; on obtient pour $k+1$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}(I_n - C)^j = (I_n - (I_n - C)^k)C^{-1} + (I_n - C)^k = (I_n - (I_n - C)^k + (I_n - C)^k C)C^{-1} = (I_n - (I_n - C)^{k+1})C^{-1}$. L'égalité est donc vraie pour $k+1$.

15. On fait une démonstration par récurrence. C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - P)A' + (I_n - AA')$ puisque $I_n - P = A$. Supposons l'égalité vraie pour k; on obtient pour $k+1$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} P^j - (I_n - P^{k+1})A' - (k+1)(I_n - AA') = P^k + (I_n - P^k)A' - (I_n - P^{k+1})A' - (I_n - AA') = P^k + (P^{k+1} - P^k)A' - (I_n - AA') = P^k(I_n - AA') - (I_n - AA') = (P^k - I_n)(I_n - AA') = (P^{k-1} + ... + I_n)(P - I_n)(I_n - AA') = (P^{k-1} + ... + I_n)(-A + A^2A') = 0$. L'égalité est donc vraie pour $k+1$.

    Une autre méthode utilise la question 14 en prenant $C = B$ pour $A = W\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W^{-1}$ d'où $P = W\begin{pmatrix} I_r - B & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$.
    $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P^j = W\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(I_r - B)^j & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{pmatrix}W^{-1} = W\begin{pmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$. Cette matrice est bien égale à $(I_n - P^k)A' + k(I_n - AA') = W\begin{pmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W^{-1} + kW\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$.

16. $||(I_n - P^k)A'|| \leqslant (||I_n|| + ||P||^k)||A'||$ puisque $||...||$ est une norme et en utilisant la question 1. Avec la question 2 on obtient $||(I_n - P^k)A'|| \leqslant 2||A'||$ d'où $\displaystyle\lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{k}(I_n - P^k)A' = 0$. On en déduit $\displaystyle\lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$.

17. D'une part, $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j$ a ses coefficients positifs (question 3); la matrice limite $I_n - AA'$ a donc également ses coefficients positifs. D'autre part $(I_n - AA')J_n = J_n - A'AJ_n = J_n$ puisque $AJ_n = J_n - PJ_n = 0$. $I_n - AA'$ est bien stochastique.
    $(I_n - AA')A = A - AA'A = 0$ puisque A' est le pseudo-inverse de A.

18. Utilisons le théorème 1: pour $X \in \mathcal{K}_n$ on a $X_\infty = \displaystyle\lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} XP^j = X(I_n - AA')$; en prenant $X = E_i$ (ligne i de la matrice I_n) on obtient que la ligne i de la matrice $I_n - AA'$ est égale à X_∞. On a donc bien $I_n - AA' = J_n X_\infty$.

ANNEXE

Les questions 11 et 12 sont inutiles; de plus le théorème 1, au lieu d'être admis, peut très facilement se démontrer au cours du problème.

- On remplace les questions 11 à 13 par:
  Montrer que si P est une matrice stochastique strictement positive alors $\mathrm{Ker}(P - I_n)$ est une droite engendrée par J_n. Soit alors $A = I_n - P$; montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$ (indication: introduire pour $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ un Y tel que pour tout $k \geqslant 1$: $kX = Y - P^k Y$).

  Démonstration:
  Soit $X \neq 0$ tel que $PX = X$; soit k tel que $|x_k| = N_\infty(X)$; quitte à changer X en $-X$ on peut supposer $x_k > 0$. $x_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{k,j} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_{k,j} x_k = x_k$ d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{k,j}(x_k - x_j) = 0$ avec $p_{k,j} > 0$ et $x_k - x_j \geqslant 0$. On en déduit pour tout j, $x_j = x_k$ et donc $X = x_1 J_n$.

  Remarque: on peut affaiblir l'hypothèse sur P en supposant P stochastique et il existe $a > 0$ tel que P^a soit strictement positive; on a en effet $\mathrm{Ker}(P - I_n) \subset \mathrm{Ker}(P^a - I_n)$.

  Soit $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$: $PX = X$ et il existe Y tel que $X = Y - PY$. En appliquant P on obtient, pour tout $k \geqslant 1$, $X = P^{k-1}Y - P^k Y$ d'où en ajoutant de 1 à k: $kX = Y - P^k Y$. On a $N_\infty(PY) \leqslant N_\infty(Y)$ puisque pour tout i, $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}|y_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} N_\infty(Y) = N_\infty(Y)$. Par suite, $N_\infty(X) \leqslant \dfrac{1}{k}(N_\infty(Y) + N_\infty(P^k Y)) \leqslant \dfrac{2}{k} N_\infty(Y)$ d'où en faisant tendre k vers $+\infty$: $X = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$ d'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

- La question 16 donne $\displaystyle\lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$ qui est, d'après la question 9, la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A)$. Puisque $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par J_n on déduit $I_n - AA' = J_n L$ où L est une matrice ligne stochastique positive ($I_n - AA'$ est stochastique positive). $\mathrm{Ker}(I_n - AA') = \mathrm{Im}(A)$ entraine que pour toute colonne X, $J_n LAX = 0$ et donc $J_n LA = 0$; la ligne LA est donc nulle soit encore $LP = L$. L est donc l'unique (puisque dim(Ker($P - I_n$))=1) matrice ligne stochastique telle que $L = LP$. Pour toute matrice ligne stochastique X ($XJ_n = 1$), on a donc $\displaystyle\lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} XP^j = X(I_n - AA') = XJ_n L = L$ ce qui fournit la dernière partie du théorème 1 (on pose $L = X_\infty$).