Mines-Ponts 2003 - PC 1 : corrigé.

PARTIE 1

1. Puisque $\ln F$ est convexe, on peut lui appliquer les inégalités rappelées au début de l'énoncé ; on obtient d'abord, avec $x_1 = n-1, x_2 = n$ et $x_3 = n+x$: $\ln F(n) - \ln F(n-1) \leqslant \dfrac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x}$. Puisque $0 < x < 1$ on peut poser ensuite $x_1 = n, x_2 = n+x$ et $x_3 = n+1$; on obtient : $\dfrac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leqslant \ln F(n+1) - \ln F(n)$.

2. Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $F(n) = (n-1)!$; c'est vrai pour $n = 1$ par (iii) ; si $F(n) = (n-1)!$, on déduit par (i) que $F(n+1) = nF(n) = n(n-1)! = n!$.

La question 1. donne $x\ln(n-1) \leqslant \ln F(n+x) - \ln(n-1)! \leqslant x \ln n$ d'où $(n-1)^x(n-1)! \leqslant F(n+x) \leqslant n^x(n-1)!$.

3. Montrons par récurrence que pour $p \geqslant 1$, $F(p+x) = (x+p-1)...(x+1)xF(x)$; c'est vrai pour $p = 1$ par (i) ; si c'est vrai pour p, on déduit par (i) que $F(x+p+1) = (x+p)F(x+p) = (x+p)(x+p-1)...(x+1)xF(x)$.

4. Utilisons 2. : $n^x n! = n^x(n-1)!n \geqslant nF(n+x) = n(n+x-1)...xF(x)$ d'où la première inégalité. En changeant n en $n+1$ dans 2. on obtient : $n^x n! \leqslant F(n+1+x) = (x+n)...xF(x)$ d'où la seconde inégalité.

5. La suite $u_n(x)$ est encadrée par 2 suites qui convergent vers la même limite $F(x)$, elle converge donc aussi vers $F(x)$.

6. Pour $x > 1$, posons $x = p+y$ avec p entier et $0 \leqslant y < 1$.

$$u_n(p+y) = \frac{n^{p+y}n!}{(p+y)...(p+y+n)} = u_n(y)\frac{n^p}{(y+n+1)...(y+n+p)}y(y+1)...(y+p-1).$$

La fraction a pour limite 1 quand n tend vers l'infini, donc $u_n(x) = u_n(p+y)$ a pour limite $F(y)y(y+1)...(y+p-1)$ c'est à dire $F(p+y) = F(x)$.

7. L'unicité de F résulte de l'unicité de la limite de la suite $u_n(x)$.

8. Au voisinage de $t = 0$, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ ssi $x > 0$. Au voisinage de $t = +\infty$, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o(\dfrac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$. En conclusion, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ssi $x > 0$.

9. Γ est donc définie sur $]0,+\infty[$ et strictement positive puisque $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

10. $k(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. $\dfrac{\partial k}{\partial x} = (\ln t)k(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2} = (\ln t)^2 k(x,t)$ sont donc continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $0 < a < b$; pour $x \in [a,b]$, $k(x,t) \leqslant k(a,t)$ si $t \leqslant 1$ (car $\ln t \leqslant 0$) et $k(x,t) \leqslant k(b,t)$ si $t \geqslant 1$ (car $\ln t \geqslant 0$). Donc $0 \leqslant k(x,t) \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} k(a,t) & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ k(b,t) & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$; φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ donc Γ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, $|(\ln t)^m k(x,t)| \leqslant |\ln t|^m \varphi(t)$ qui intégrable sur $]0,+\infty[$ car : au voisinage de $t = 0$, $|\ln t|^m\varphi(t) \sim \dfrac{|\ln t|^m}{t^{1-a}} = o(\dfrac{1}{t^{1-a/2}})$ qui est intégrable sur $]0,1[$ et au voisinage de $t = +\infty$, $|\ln t|^m\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$. Γ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$; $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty}(\ln t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$. Pour $x = 1$, $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty}(\ln t)\mathrm{e}^{-t}dt$.

11. Nous savons déjà que Γ est définie et strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il reste à montrer les propriétés (i),(ii) et (iii). (iii) est immédiate car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}dt = 1$. (i) se montre par une intégration par parties : pour $0 < a < b$, $\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}dt = [-t^x\mathrm{e}^{-t}]_{t=a}^{t=b} + x\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ d'où en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Il reste à montrer (ii), c'est à dire que $\ln\Gamma$ est convexe : $(\ln\Gamma)'' = (\dfrac{\Gamma'}{\Gamma})' = \dfrac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ est positive ; en effet, $\Gamma'(x)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$ résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)^2dt \int_0^{+\infty} g(t)^2dt$ appliquée à $f(t) = \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ et $g(t) = (\ln(t))\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ (qui sont bien de carré intégrable sur $]0,+\infty[$).

12. $\ln u_n(x) = x\ln n - \ln x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{x+k}{k} = g_n(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \ln\Gamma(x)$.

13. Pour $n \geqslant 2$, $v_n(x) = x\ln n - x\ln(n-1) - \ln(1+\frac{x}{n})$ donc $v_n'(x) = \ln n - \ln(n-1) - \dfrac{1}{x+n} = -\ln(1-\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{x+n} = \dfrac{1}{n} + O(1/n^2) - \dfrac{1}{x+n} = O(1/n^2)$. $(\sum v_n(x))$ est donc convergente.

Soit $0 < a < b$; pour $x \in [a,b]$, $v_n'(a) \leqslant v_n'(x) \leqslant v_n'(b)$ d'où $|v_n'(x)| \leqslant |v_n'(a)| + |v_n'(b)|$ qui est le terme général d'une série convergente. Il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout segment $[a,b]$ de la série $(\sum v_n(x))$.

14. Puisque v_n est de classe $\mathcal{C}^1$, que $(\sum v_n(x))$ converge simplement et que $(\sum v_n'(x))$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, on peut dériver terme à terme la série $(\sum v_n(x))$. Comme $g_n(x)$ est la somme partielle à l'ordre n, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n'(x) = (\ln\Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

15. $g_n'(x) = \ln n - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$ donc $g_n'(1) = \ln n - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k} = -\frac{1}{1+n} - (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$ qui a pour limite $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$ quand n tend vers $+\infty$; on a donc $\boxed{\Gamma'(1) = -\gamma}$

PARTIE 2

16. Le théorème spécial des séries alternées s'applique immédiatement car $\frac{1}{(2n+1)^s}$ tend vers 0 en décroissant puisque $s > 0$.

17. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, le théorème spécial des séries alternées s'applique : $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ tend vers 0 en décroissant puisque c'est le produit de 2 suites positives décroissantes. Le reste à l'ordre n est donc majoré en valeur absolue par $\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{(2n+1)}$: il y a donc convergence uniforme sur [0,1]. Le rayon de convergence de la série entière de somme $\varphi(x)$ est donc au moins égal à 1 et on peut dériver terme à terme pour $0 \leqslant x < 1$: $\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ d'où $\varphi(x) = \arctan x$ puisque $\varphi(0) = 0$. Par convergence uniforme sur [0,1], φ est continue sur [0,1] et donc $\varphi(x) = \arctan x$ sur [0,1] : $L(1) = \varphi(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

18. $h_s'(x) = \frac{1 - s\ln x}{x^{s+1}}$ est positive ssi $x \leqslant x_s = \mathrm{e}^{1/s}$ donc h_s est croissante sur $]0, x_x[$ et décroissante sur $]x_s, +\infty[$. La fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{1/s}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

19. $L(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(s)$ avec $w_n(s) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ et cette série converge simplement sur $]0, +\infty[$. w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $w_n'(s) = \frac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{(2n+1)^s}$. Montrons que la série $(\sum w_n'(s))$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Soit $s \in [a, b]$. $(\sum w_n'(s))$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème spécial pour $n \geqslant n_0$ avec $2n_0 + 1 \geqslant \mathrm{e}^{1/a}$: en effet on a alors $2n + 1 \geqslant \mathrm{e}^{1/s}$, donc la suite $|w_n'(s)| = h_s(2n+1)$ est décroissante ; de plus elle tend vers 0. On peut alors majorer la valeur absolue du reste à l'ordre n par $\frac{\ln(2n+3)}{(2n+3)^a}$ qui tend uniformément vers 0. On en déduit que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $L'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{(2n+1)^s}$.

En particulier, $L'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{2n+1}$.

20. Effectuons le changement de variable $u = nt$: $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{nt} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^u u^{s-1}}{n^s} du = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$.

21. Considérons la série de terme général $u_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)t} t^{s-1}$ et appliquons le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$:

- u_n est continue sur $]0, +\infty[$.
- $(\sum u_n(t))$ converge simplement vers $\frac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}$ continue sur $]0, +\infty[$ (série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-2t}$).
- Les sommes partielles vérifient une condition de domination : $|S_n(t)| = |\frac{(1 - (-\mathrm{e}^{-2t})^{(n+1)})}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}| \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}$ qui est une fonction continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut alors intégrer terme à terme : $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)t} t^{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{(2n+1)^s} = L(s)\Gamma(s)$.

22. Effectuons d'abord le changement de variable défini par $t = \ln u$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1, \infty[$ sur $]0, \infty[$: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}(\ln t)}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} dt = \int_1^{\infty} \frac{\ln(\ln u)}{1 + u^2} du$. Puis effectuons le changement de variable défini par $u = \tan x$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\pi/4, \pi/2[$ sur $]1, \infty[$) : $\int_1^{\infty} \frac{\ln(\ln u)}{1 + u^2} du = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x))) dx = I$. On en déduit : $I = \frac{d}{ds}(L(s)\Gamma(s))|_{s=1} = L'(1)\Gamma(1) + L(1)\Gamma'(1) = L'(1) - \frac{\pi}{4}\gamma$.