Corrigé rédigé par Gentiane Bichard (PCSI Compiègne), relu par François Carru (PC Enghien).

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PC 2 MINES 2001

PREMIERE PARTIE

I-1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :

a. Soit $f_\lambda : x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ solution de E_λ sur $]-R, R[$, alors sur cet intervalle, f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée première est la somme de la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, sa dérivée seconde est la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
On a donc

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

ce qui après arrangement donne : $\sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda) a_n\Big) x^n - \lambda + a_1 = 0$

D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par $\begin{cases} a_1 = \lambda \\ \forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n \end{cases}$; on a donc pour tout $n \geqslant 1$:

$\boxed{a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}\lambda}$

On aura en particulier :

$$f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$
$$f_0 = 1$$
$$f_{-1}(x) = 1 - x$$
$$f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

b. f_λ est un polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de a_n précédemment déterminée, on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + \lambda = 0$;
d'où $\boxed{f_\lambda \text{ est un polynôme si et seulement si } -\lambda \in \mathbb{N}}$

Lorsque $\lambda = -p$, avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $\quad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k-p)}{(n!)^2}(-p)$, donc si $p \geqslant 1$, alors $a_p = (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p!)^2}(-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$, formule qui reste valable si $p = 0$, puisqu'alors $a_0 = 1$,
d'où $a_p \neq 0$, et $a_{p+1} = 0$, puis $\forall n \geqslant p+1, \quad a_n = 0$,
d'où $\boxed{f_{-p} \text{ est un polynôme de degré } p \text{ et de coefficient dominant } \frac{(-1)^p}{p!}}$

c. Supposons que f_λ ne soit pas polynomiale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ (car d'après l'expression trouvée pour a_n, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang si et seulement si il existe un entier n pour lequel $a_n = 0$)
et on a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; la règle de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\boxed{R = \infty}$

I-2. Solution de l'équation différentielle E_1 :

a. On effectue le changement de fonction inconnue $z = y' - y$; l'équation E_1 se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z :

$$xz' + z = 0$$

Sur $]0, \infty[$, cette équation est résolue en z, et a pour solutions les fonction du type $x \mapsto a e^{-\int \frac{dx}{x}}$, soit $x \mapsto \frac{a}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
On revient alors en y : $y' - y = \frac{a}{x}$; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en y, mais qui n'est plus homogène ; on applique la méthode de variation de la constante, en

cherchant y sous la forme $\varphi(x)e^x$, ce qui conduit à l'équation $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$.

Finalement, on peut conclure que f_1 est une fonction du type $\boxed{x \mapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + be^x}$, où a et b sont des réels quelconques.

Autre méthode : on remarque que $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation et on cherche les solutions sous la forme $x \mapsto z(x)e^x$.

b. La résolution sur $]-\infty, 0[$ est la même, et on obtient les solutions sous la forme $\boxed{x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}dt + \beta e^x}$ où α et β sont des réels quelconques.

c. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, donc lorsque $x \to 0$, on a : $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} e^x \int_1^x \frac{e^t}{t}dt = -\infty$; de même, $\lim\limits_{x\to 0} e^x \int_{-1}^x \frac{e^t}{t}dt = -\infty$;

Si φ est solution de E_1 sur $\mathbb{R}$, sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution de E_1 sur $]0, +\infty[$, sa restriction à $]-\infty, 0[$ est solution de E_1 sur $]-\infty, 0[$, et de plus φ est continue en 0, d'où si φ est solution sur $\mathbb{R}$, alors nécessairement il existe un réel a tel que $\varphi : x \mapsto ae^x$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc aussi en 0 par continuité.

Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions $x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } E_1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto ae^x \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

I-3. Relation entre les fonctions f_λ :

a. f_λ est solution de $E_\lambda : xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

g_λ est définie par $g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)$, donc g_λ est deux fois continûment dérivable, et on a :

$f_\lambda(x) = e^x g_\lambda(-x)$, $\quad f'_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x))$, $\quad f''_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x))$

on a donc la relation :

$$-x(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)) + (1+x)(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)) - \lambda g_\lambda(x) = 0 \text{ ou encore :}$$
$$xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) + (\lambda - 1)g_\lambda(x) = 0$$

ainsi, g_λ est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' - (1-\lambda)y = 0}$$

b. Ce qui signifie que g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$, or $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$, de plus g_λ est produit de deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc g_λ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g_λ est solution développable en séries entières sur $\mathbb{R}$ de E_λ telle que $g_\lambda(0) = 1$, donc par unicité (admise dans l'énoncé) on peut affirmer $g_\lambda = f_{1-\lambda}$, ce qui démontre la relation vérifiée par tous réels λ et x :

$$\boxed{f_1 - \lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)}$$

c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$;

D'après la relation précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$;

or d'après **I-1.** f_{1-p} est la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n$ où $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}$, d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x + \sum_n = 1^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2} x^n e^x}$$

en particulier pour tout réel x :

$$\boxed{f_2(x) = e^x + xe^x et f_3(x) = e^x + 2xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x}$$

d. Soit p un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel x : $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$ et $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$, de plus, f_{-p} et $f_{1-p,}$ sont des polynômes de degré respectif p et $p-1$, donc au voisinage de $+\infty$, $xf_p(x)$ ne s'annule pas et ainsi l'expression $\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)}$ est correctement définie. D'après **I-1.b.** on peut alors préciser :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(-1)^p}{p!}x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}x^p}$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{-1}{p}}$

I-4. Application à une équation aux dérivées partielles :
On pose $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r)$, où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, alors on a : $\frac{\partial r}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{r}$
$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{2}xr^{-\frac{5}{2}} f_\lambda(r) + xr^{-\frac{3}{2}} f'_\lambda(r) = xr^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{2}f_\lambda(r) + rf'_\lambda(r)\right)$, puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) &= xr^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{x}{2r}f'_\lambda(r) + \frac{x}{r}f'_\lambda(r) + xf''_\lambda(r)\right) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\frac{x^2}{r}r^{\frac{-7}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}f_\lambda(r) + rf'_\lambda(r)\right)\\ &= \left(x^2r^{-\frac{5}{2}}\right)f''_\lambda(r) + \left(\frac{x^2}{2}r^{-\frac{7}{2}} + r^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}x^2r^{-\frac{7}{2}}\right)f'_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}x^2r^{\frac{-9}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}f_\lambda(r)\right)\\ &= \left(x^2r^{-\frac{5}{2}}\right)f''_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{3}{2}} - 2x^2r^{-\frac{7}{2}}\right)f'_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}x^2r^{\frac{-9}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}f_\lambda(r)\right)\end{aligned}$$

on en déduit par symétrie que :

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}}f''_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}}f'_\lambda(r) - \frac{1}{4}\frac{1}{r^2\sqrt{r}}f_\lambda(r)$$

puis $-\frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{r\sqrt{r}}\left(\frac{1}{2}f_\lambda(r) - rf'_\lambda(r)\right)$ et $\frac{1}{4r^2}F(x,y,z) = \frac{1}{4r^2\sqrt{r}}f_\lambda(r)$, d'où

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2}F\right)(x,y,z)\\ &= \frac{1}{r\sqrt{r}}rf''_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}}(1-r)f'_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}}\left(\frac{1}{2}f_\lambda(r)\right)\\ &= \frac{1}{r\sqrt{r}}\left(rf''_\lambda(r) + (1-r)f'_\lambda(r) + \frac{1}{2}f_\lambda(r)\right)\end{aligned}$$

donc si F est solution de l'équation aux dérivées partielles (P) alors $rf''_\lambda(r) + (1-r)f'_\lambda(r) + \frac{1}{2}f_\lambda(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, d'où on choisit $\boxed{\lambda = \frac{-1}{2}}$

SECONDE PARTIE

II-1. Classique : $I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2+2p}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta = I_p - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\cos^2\theta d\theta$;
or $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\cos^2\theta d\theta = \left[\frac{\sin^{2p+1}\theta}{2p+1}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2p+2}\theta}{2p+1}d\theta = \frac{1}{2p+1}I_{p+1}$; d'où $\boxed{I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p}$; par ailleurs $I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc une récurrence élémentaire permet d'établir que
$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$

II-2. Relations entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. La fonction $(x,\theta) \mapsto e^{x\sin^2\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc φ est définie continue sur $\mathbb{R}$.
On a en fait : $(x,\theta) \mapsto e^{x\sin^2\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de plus
$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(e^{x\sin^2\theta}\right)d\theta = \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\theta e^{x\sin^2\theta}d\theta.$

b. Déterminons déjà le développement en séries entières de $x \mapsto e^{x\sin^2\theta}$:
$e^{x\sin^2\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^{2n}\theta}{n!}x^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, or cette série est normalement convergente en θ et ceci pour tout x, puisque $\left\|\theta \mapsto \frac{\sin^{2n}\theta}{n!}x^n\right\|_\infty = \frac{x^n}{n!}$, donc par intégration en θ, il vient :
$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n}$.
Posons $\alpha_n = \frac{I_n}{n!}$, alors $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2n+1}{2n+2}}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)^2}$, donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, et on a $\alpha_n = \frac{\pi}{2}a_n$ (en regardant au rang initial $n=0$) ; d'où $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}f_{1/2}}$

II-3. Encadrement de $\varphi(x)$:

a. Par convexité de exp, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$ (le graphe de exp est situé au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente en $(0,1)$)
et donc pour tout réel $u < 1, \quad e^{-u} \geqslant 1 - u > 0$, d'où en inversant :

$$\boxed{\forall u < 1, \quad e^u \leqslant \frac{1}{1-u}}$$

N.B. On peut aussi faire une étude sommaire de $x \mapsto (1-x)\, e^x - 1$

b. Notons déjà que l'hypothèse $x < 1$ assure que $\theta \mapsto 1 - x\sin^2\theta$ ne s'annule pas et donc que $\theta \mapsto \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$ est définie continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui justifie l'existence de $J(x)$.
Ensuite, les règles de Bioche invitent à effectuer le changement de variable $t = \tan\theta$, ce qui est justifié par le fait que $\theta \mapsto \tan\theta$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$
Alors il vient $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2(1-x)}$; enfin on utilise encore le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme : $v = t\sqrt{1-x}$ et on obtient : $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dv}{\sqrt{1-x}}}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\arctan v\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; finalement, on a démontré :

$$\boxed{J(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

c. D'après **II-3.a**, pour tout réel $x < 1, \quad e^{x\sin^2\theta} \leqslant \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$, d'où par croissance de l'intégrale, pour tout réel $x < 1, \quad \varphi(x) \leqslant J(x)$; par ailleurs, exp étant à valeurs strictement positives, on a pour tout réel x, $0 \leqslant \varphi(x)$, et donc en utilisant le résultat de **II-3.b :**

$$\boxed{\forall x < 1 \quad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

d. Posons $u = \sin\theta$, $\mathcal{C}^1$-bijectif de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0,1[$ alors $\varphi(x) = \int_0^1 e^{xu^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, puis on effectue le changement $\mathcal{C}^1$-bijectif $v = \sqrt{-x}u$, alors $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}}dv$, et $1 + \frac{v^2}{x} \leqslant 1$ puisque $x \leqslant 0$ donc $\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}}dv \geqslant \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2}dv$; de plus , puisque $x \leqslant -1$, on a $\int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2}dv \geqslant \int_0^1 e^{-v^2}dv$; posons alors $A = \int_0^1 e^{-v^2}dv$, $A > 0$ et on peut conclure pour tout réel $x \leqslant -1$: $\boxed{\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}}$

e. $f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$; or pour tout réel x strictement inférieur à 1 : $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, donc
$\forall x < 1 \quad 0 \leqslant f_{1/2}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, d'où le théorème d'encadrement des limites assure que

$$\lim_{x\to-\infty} f_{1/2}(x) = 0$$

Cependant la minoration $\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}$ pour $x \leqslant -1$ montre que φ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$, donc $\boxed{f_{1/2} \text{ n'est pas intégrable sur }]-\infty,-1]}$

II-4. Etude d'une fonction h :

a. On a en fait $h(x) = \frac{2}{\pi}e^{-\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta}d\theta$ d'après les questions précédentes.
D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(1-2\sin^2\theta\right)}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos 2\theta}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt \text{ (changement } t = 2\theta) \end{aligned}$$

puis $\int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt$, mais$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2}\cos u}du$ (en ayant posé $u-\pi-t$), donc $h(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2}\cos u}du\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\cos\theta\right)d\theta$; en particulier, cela démontre que $\boxed{h \text{ est paire}}$ et de plus on a obtenu pour tout réel x : $\boxed{h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\cos\theta\right)d\theta}$

b. Pour tout réel positif x et tout réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{ch}\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}e^{x\frac{\cos\theta}{2}} > 0$, donc
$h(x) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\cos\theta}{2}}d\theta \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}}d\theta \geqslant \frac{1}{4}e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}}$
On en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = +\infty}$

c. Pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{x\cos\theta}{2}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par croissance de ch sur $\mathbb{R}^+$).
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ par parité de h) ; h est $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$, donc $h'(0) = 0$