Ponts Deuxieme epreuve PC 2000

26 avril 2001

Theoreme de Cauchy cas linéaire sans second membre
Toutes les équations différentielles considérées dans ce problème sont des équations différentielles linéaires du second ordre résolues en y" sans second membre à coefficients continus sur R . Leurs solutions sont des R solutions et le probleme de cauchy aux données initiales (t_0, y_0, y_0') admet une unique solution . En particulier la fonction nulle est la seule solution au problème $(t_0, 0, 0)$.

Première partie

1 caractérisation d'une solution périodique

Si f est solution de E_1 et admet 2π pour période alors $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
Reciproquement sous cette hypothese en définissant g par $g(t) = f(t + 2 * \pi)$, g est solution de E_1 pour le probleme de Cauchy $(t = 0, f(2\pi), f'(2\pi))$ .E_1 étant une équation différentielle linéaire résolue en y" à coefficients continus ,ce probleme admet une unique solution et donc $g = f$ et f admet $2*\pi$ pour période

2 construction d'une solution périodique

2.1

Si f est une solution admettant $2 * \pi$ pour période solution de E_1 elle est de classe C_∞ et vérifie donc les hypothèses du théoreme de convergence normale des séries de Fourier

2.2

Comme f est de classe C_1 le cours donne $c_n(f') = inc_n(f)$. En appliquant à f' on a donc $c_n(f") = -n^2 c_n(f)$. On en déduit en appliquant au calcul du coefficient de Fourier d'ordre n du membre de gauche de l'équation que

$$-n^2 c_n(f) + c_{n-1}(f) = 0$$

2.3

Par suite avec $n = 0$ $c_{-1}(f) = 0$ *puis* $c_n(f) = 0$ *pour* n *négatif*. Puis pour n dans N $c_n(f) = \frac{c_0(f)}{(n!)^2}$. On en déduit que si f existe

$$f(t) = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{exp(int)}{(n!)^2}$$

<u>**Remarque :**</u>Il faudrait ici une réciproque : surtout du fait que la fonction ainsi définie est bien de classe C_2 en utilisant les théoremes de dérivation des séries de fonctions normalement convergentes $1/(n!)^2 = o(1/n^4)$.

3 inégalité vérifiée par f et f'

3.1

La série de Fourier de f étant normalement convergente, f est bornée . De plus avec $N(f) = sup_R\{\mid f(t) \mid\}$ comme f est solution de E_1 elle vérifie $N(f") = N(f)$. L'inégalitée des accroissements finis conduit à la majoration de $\mid C \mid$ et $\mid D \mid$ par $\frac{h^2}{2}N(f)$.

3.2

$2hf'(t) = D - C + f(t+h) - f(t-h)$ par suite $\forall h > 0$ $N(f') \leq \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right) N(f)$ avec $\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right) \geq \sqrt(2)$. On conclut

$$\underline{\mathbf{N(f') \leq \sqrt(2) N(f)}}$$

Deuxième partie

1 rayon de convergence

$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence $R = \infty$ de somme notée g

2 signe de g

On vérifie que la série entière dérivée de g de somme g' converge sur [0,2] par application du critère des séries alternées dès le rang 0 . Le signe du premier terme (négatif) donne le signe de g' sur [0,2] : $g' < 0$. De même la série de g converge par application du même critère à partir du rang 1.Avec $g(0) = 1$ et $g(2) = 1 - 2 + R_1(2)$ avec $\mid R_1(2) \mid\leq u_2(2) = 1$, $g(2) \leq 0$, puis $g(\sqrt(2)) = 1 - \sqrt(2) + \frac{2}{4} + R_2(\sqrt(2)$ et $\mid R_2(\sqrt(2)) \mid\leq\mid u_3(\sqrt(2) \mid$ soit $\mid R_2(\sqrt(2)) \mid\leq \frac{2\sqrt(2)}{36} < 0,08$ (en majorant $\sqrt(2)$ par 1,42 Comme $R_2(\sqrt(2)) < 0$ (Critère spécial des SA) on a à nouveau par la même majoration $g(\sqrt(2))) > 1,5 - 1,42 - 0,08 = 0$.
Par décroissance de g sur l'intervalle on peut conclure que g s'annule en $x_0 \in]\sqrt(2), 2]$,est positive avant x_0 et négative après.

Troisième partie

ETUDE de L'EQUATION : E_2 $y"(t) + exp(t)y(t) = O$

On note que E_2 est une équation différentielle linéaire résolue en $y"$ à coefficients continus sur R .

1 zéros de la fonction y

1.1

D'après le théorème de Cauchy cas linéaire sans second membre $y = 0$

1.2

Soit z solution de F et y vérifiant H(strictement positive sur $[\alpha, \beta]$). On vérifie aisément (utiliser 1.1 et faire un dessin) que $z'(\alpha) = \lim\limits_{t \to \alpha+} \frac{z(t)-0}{t-\alpha} \geq 0$ et $\neq 0$ et de même $z'(\beta) < 0$. Un calcul direct donne avec $W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$, $W'(t) = (exp(t) - exp(a))y(t)z(t)$ est donc strictement positif sur $]\alpha, \beta[$. W est croissante sur $[\alpha, \beta]$) . Comme $W(\alpha) = y(\alpha)z'(\alpha) > 0$ et $W(\beta) = y(\beta)z'(\beta) < 0$ ceci conduit une absurdité . Donc sur $[\alpha, \beta]$ intervalle défini par deux zéros consécutifs de z , y s'annule.

Remarque : les résultats demeurent si on suppose simplement z et y de signe strict fixe sur les intervalles respectifs (les équations différentielles étant linéaires changer si besoin z en $-z$ et si besoin y en $-y$)

1.3

Avec $a = \tau$ $z(t) = \sin(exp(-\tau/2)(t - \tau))$ est une solution de F s'annulant en τ et $\tau + \pi exp(-\tau/2)$ deux zéros consécutifs. Par suite y s'annule sur tout intervalle $[\tau, \tau + \pi exp(-\tau/2)]$.

2 espacement des zéros de la fonction y

2.1

Comme y n'est pas nulle et $y(\tau) = 0$ $y'(\tau) \neq 0$. y étant C_1 y est srictement monotone au voisinage de τ et pour un certain $c > 0$ non nulle sur $]\tau, \tau + c[$. Ce qui justifie la notion de zéros consécutifs .

2.2

Avec $0 < \epsilon < c$ Soit $z(t) = \sin(exp(-\beta/2)(t - \beta - \epsilon)$. Avec les deux zéros consécutifs choisis on a nécessairement un zéro de y dansl'intervalle semi ouvert $[\beta - \epsilon - \pi exp(-\beta/2)$, $\beta - \epsilon[$ Par consquent :

$$(\beta - \epsilon - \pi exp(-\beta/2)) \leq \alpha < \beta - \epsilon < \beta$$

. En faisant tendre ϵ vers 0 , $\beta - \pi exp(-\beta/2) \leq \alpha < \beta$ D'ou le résultat :

$$\beta - \alpha \geq \pi exp(-\beta/2)$$

Quatrième partie

1 Fonction Ψ

On remarque que $\Psi(t) = g(exp(t))$ (g fonction de II) .

1.1

$v_n(t) = u_n(exp(t)$. $\forall x \in (-\infty, a]$ $\mid v_n(t) \mid \leq \mid u_n(exp(a) \mid$ qui est le terme d'une série numérique convergence (Rayon de convergence ∞ pour g).
La série de fonctions de terme général v_n converge normalement donc uniformément sur $(-\infty, a]$.

1.2

Avec la remarque préliminaire Ψ est par composition de classe C_∞ avec $\Psi"(t) = exp(2t)g"(exp(t)) + exp(t)g(exp(t))$ ce qui conduit à Ψ solution deE_2 sur R si et seulement si ($x = exp(t)\ et\ xg"(x)+g'(x)+g(x) = 0$). Par dérivation terme terme d'une série entière sur son intervalle de convergence ici R , avec un changement d'indice le résultat est immédiat .

2

Vue la remarque t zéro de Ψ Si et seulement si $exp(t)$ est un zéro positif de g. Sur[0,2] g admet l'unique zéro $x_0 > sqrt(2)$ .Par croissance de l'exponentielle Ψ admet un plus petit zéro $t_0 = \ln(x_0) > \frac{\ln 2}{2}$. Supposons définis les zéros consécutifs de Ψ $t_0, \cdots, t_n$ en ordre croissant . Par application du III 1 c et III 2 ,Ψ admet des zéros qui sont dans $A_n = [t_n + c_{t_n}, \infty[$. A_n étant fermé il existe un plus petit zéro de Ψ dans A_n donc strictement supérieur à t_n soit t_{n+1} . On en déduit par récurrence que les zéros de Ψ constituent une suite monotone croissante . Le III 1c prouve en prenant τ arbitrairement grand que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Enfin en reprenant le III 1c et $m_n = \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$ avec $\tau = m_n$ on a $t_n < m_n < t_{n+1} \leq m_n + \pi exp(\frac{-m_n}{2})$. D'où $0 < t_{n+1} - t_n \leq m_n - t_n + \pi exp(\frac{-m_n}{2}) = \frac{t_{n+1}-t_n}{2} + \pi exp(\frac{-m_n}{2})$ Par suite $0 < \frac{t_{n+1}-t_n}{2} \leq \pi exp(\frac{-m_n}{2})$
Conclusion $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$

Cinquième partie

1 lemme de Gronwall

On introduit en plus G primitive nulle en a de g. g étant positive sur l'intervalle l'inégalitée proposée s'écrit $g(t)f(t) \leq g(t)M + g(t)F(t)$ soit encore $F'(t) - G'(t)F(t) \leq g(t)M$. $exp(-G(t))$ étant positif on est conduit à $exp(-G(t))(F'(t) - G'(t)F(t) \leq MG'(t)exp(-G(t))$. En intégrant alors de a à t : $exp(-G(t))F(t) - 0 \leq M(1 - exp(-G(t)) - 1)$ Puis $F(t) \leq M(exp(G(t) - 1)$ Le résultat s'obtient alors en reportant ce résultat dans l'équation proposée.

2 Majoration de la valeur absolue de y(t)/t

2.1

Avec $y"(t) = -y(t)\varphi(t)$ la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale donne $y(t) = y(a) + (t-a)y'(a) - \int_a^t (t-x)y(x)\varphi(x)dx$.

2.2

Pour $t \geq a$, $|j(t)| \leq |j(a)| + \mid y'(a) \mid + \int_a^t |j(x)|x \mid \varphi(x) \mid dx$. Les hypothèses du lemme de Gronwall sont satisfaites pour $\mid j \mid$ et il conduit $|j(t)| \leq (|j(a)| + \mid y'(a) \mid) \int_a^t x \mid \varphi(x) \mid dx$.

$$\forall t \geq a \quad |j(t)| \leq (|j(a)| + \mid y'(a) \mid) \int_a^{+\infty} x \mid \varphi(x) \mid du = D$$

3 limites de $y'(t)$ et $j(t)$ en $+\infty$

3.1

$\forall t \geq a \quad y'(t) = y'(a) + \int_a^t y"(x)dx \mid y"(t) \mid = \mid y(t)\varphi(t) \mid \leq Dt\varphi(t)$ et $y"$ est donc intégrable sur $[a, \infty[$ par application du théorème de majoration . Par suite il existe $\lim\limits_{t \to \infty} y'(t) = l$.

3.2

En remplacant $y(t)$ par $y(t) - lt$ .On est amené à démontrer le résultat en supposant $l = 0$.
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists T > a \; \forall t \geq T \mid y'(t) \mid < \epsilon$ D'où $\mid y(t) - y(T) \mid \leq (t-T)\epsilon$ (inégalitée des accroissements finis). Par suite $\mid j(t) \mid \leq \mid \frac{y(T)}{t} \mid + 1\epsilon$ et $\exists T_1 > T \quad \forall t > T_1 \quad \mid j(t) \mid \leq 2\epsilon$.
Conclusion : $\lim\limits_{t \to +\infty} j(t) = 0$.