CONCOURS MINES-PONTS 2000, MATHÉMATIQUES, PREMIÈRE ÉPREUVE, FILIÈRE PC.

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Roger Dallard, Lycée Pasteur (Neuilly)

---

1. Définition du réel ρ : $V(X) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$.

a. Quand on remplace X par λX, la deuxième colonne est multipliée par λ, la troisième par λ^2 etc.. Donc :

$$\boxed{\nu(\lambda X) = \lambda.\lambda^2.\dots.\lambda^{n-1}\nu(X) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}\nu(X).}$$

En particulier si $X = ||X||.Y$:

$$\boxed{\nu(X) = ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}\nu(Y).}$$

b. $\nu(X)$ est une fonction polynomiale des coordonnées de X sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$ donc

$$\boxed{\nu \text{ est continue de } E_n \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

Par composition par la fonction module, qui est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, l'application $|\nu|$ est continue de E_n dans $\mathbb{R}$. La sphère unité S étant un compact de E_n,

$$\boxed{\text{L'application } X \mapsto |\nu(X)| \text{ admet un maximum } \rho \text{ sur } S, \text{ atteint pour au moins un vecteur } W.}$$

c. Soit $X \in E_n$.

i. On peut toujours trouver Y tel que $||Y|| = 1$ et $X = ||X||.Y$: si $X = 0$ on prend Y quelconque de norme 1 ; sinon on prend $Y = \dfrac{X}{||X||}$.

On a donc $|\nu(X)| = ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}|\nu(Y)|$ et $|\nu(Y)| \leq \rho$ puisque $Y \in S$. Donc

$$\boxed{\forall X \in E_n, |\nu(X)| \leq \rho||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$$

ii. En particulier , si $X \in S$ et est tel que $|\nu(X)| = \rho$ (un tel X existe d'après b.), soit W de norme 1 tel que $X = ||X||W$.

On a donc : $\rho = |\nu(X)| = ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}|\nu(W)| \leq |\nu(W)| \leq \rho,$ qui implique $|\nu(W)| = \rho$:

$$\boxed{\text{Il existe au moins un vecteur unitaire } W \text{ de } E_n \text{ tel que } |\nu(W)| = \rho.}$$

2. Cas $n = 2$: Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est un vecteur de E_2, X est sur la sphère unité S si et seulement si l'une de ses composantes a un module égal à 1 et l'autre a un module inférieur ou égal à 1.

On a alors $\nu(X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ et $|\nu(X)| = |x_2 - x_1| \leq |x_2| + |x_1| \leq 2.$

La valeur 2 est atteinte, par exemple pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ donc :

$$\boxed{\rho = 2.}$$

Si, pour $X \in S$, on a $2 = |\nu(X)| = |x_2 - x_1| \leq |x_2| + |x_1| \leq 2$, on doit avoir $|x_1| + |x_2| = 2$.

Compte tenu de $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 2$, cela nécessite $|x_1| = |x_2| = 1$.

On doit avoir aussi $|x_2 - x_1| = |x_2| + |-x_1|$ et on sait que le module d'une somme de complexes non nuls n'est égal à la somme des modules que si le quotient de ces complexes est un réel positif. Ici on doit donc avoir $x_2 = k.(-x_1)$ avec k réel positif. Comme $|x_1| = |x_2| = 1$, on a nécessairement $k = 1$ donc $x_2 = -x_1$. X doit donc être de la forme $\begin{bmatrix} \mu \\ -\mu \end{bmatrix}$, avec $|\mu| = 1$.

Réciproquement, un tel vecteur X est dans S et $|\nu(X)| = |-\mu - \mu| = |2\mu| = 2|\mu| = 2 = \rho.$ Résumons

Les vecteurs X tels que $\nu(X)| = \rho$ sont les vecteurs $\begin{bmatrix} \mu \\ -\mu \end{bmatrix}$, avec $|\mu| = 1$. Ils sont donc tous colinéaires à $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. Cas $n = 3$ **:**

a. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$; l'inégalité de convexité donne, pour tous réels u_1, u_2, u_3 : $e^{\frac{u_1+u_2+u_3}{3}} \leq \frac{1}{3}\left(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3}\right)$ ou : $e^{u_1}.e^{u_2}.e^{u_3} \leq \frac{1}{27}\left(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3}\right)^3$. En appliquant cela aux trois réels $u_i = \ln(t_i)$ si t_1, t_2, t_3 sont strictement positifs, cela donne, (et le résultat est évidemment vrai aussi si l'un des réels est nul, les autres étant positifs ou nuls) :

$$\boxed{t_1.t_2.t_3 \leq \frac{1}{27}\left(t_1 + t_2 + t_3\right)^3}$$

Pour fixer les idées, supposons que $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.
Si $t_1 = t_2 = t_3$, l'inégalité devient égalité.
Réciproquement, supposons que t_1, t_2 et t_3 ne soient pas tous égaux. Si t_1 est nul, on ne peut avoir l'égalité. Sinon on a $0 < t_1 < t_3$, donc $u_1 < u_3$ puisque la fonction ln est strictement croissante.
Sur $[u_1, u_3]$, Le graphe de l'exponentielle est strictement "sous la corde" donc $e^{\frac{u_1+u_3}{2}} < \frac{1}{2}\left(e^{u_1} + e^{u_3}\right)$.
L'inégalité de convexité donne ensuite :

$$e^{\frac{u_1+u_2+u_3}{3}} = e^{\frac{u_2}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{u_1+u_3}{2}\right)} \leq \frac{1}{3}e^{u_2} + \frac{2}{3}e^{\frac{u_1+u_3}{2}} < \frac{1}{3}e^{u_2} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(e^{u_1} + e^{u_3}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3}\right)$$

donc $\quad e^{u_1+u_2+u_3} < \frac{1}{27}(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3})^3 \quad$ puis $\quad t_1t_2t_3 < \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3$.

$$\boxed{\text{L'inégalité ne devient égalité que si } t_1 = t_2 = t_3}$$

On a redémontré dans un cas particulier un résultat plus général, mais qui ne semble pas être au programme :
Si f est strictement convexe sur l'intervalle I, l'inégalité de convexité appliquée à des points de I affectés de coefficients strictement posititifs ne peut être une égalité que si ces points sont tous confondus.

b. $A = (x_1 - x_2)(\overline{x_1} - \overline{x_2}) + (x_2 - x_3)(\overline{x_2} - \overline{x_3}) + (x_3 - x_1)(\overline{x_3} - \overline{x_1}) = 2(x_1\overline{x_1} + 2 \text{ analogues }) - (x_1\overline{x_2} + 5 \text{ analogues })$.
$B = x_1\overline{x_1} + 2$ analogues $\quad$ et $\quad C = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) = (x_1\overline{x_1} + 2 \text{ analogues }) + (x_1\overline{x_2} + 5 \text{ analogues })$.
On voit que

$$\boxed{A = 3B - C}$$

c. Les vecteurs de S sont ceux dont les trois composantes sont en module inférieures à 1, l'une au moins étant de module 1. Que dire de plus ?

d. Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\quad$ on a $\quad \nu(X) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ donc

$$\boxed{|\nu(X)|^2 = |x_2 - x_1|^2|x_3 - x_1|^2|x_3 - x_2|^2.}$$

D'après 3.a., ceci est inférieur à $\frac{1}{27}\left(|x_2 - x_1|^2 + |x_3 - x_1|^2 + |x_3 - x_2|^2\right)^3$ $\quad$ lui-même égal à

$\frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{3}x_k\right|^2\right)^3$ $\quad$ lui-même inférieur à $\quad \frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3 = \left(\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3$.

Comme chacun des $|x_k|^2$ est inférieur à 1, si $||X|| = 1$, on a donc $|\nu(X)|^2 \leq 27$ donc $\rho \leq \sqrt{27}$.

$$\boxed{\text{On peut présumer que } \rho = \sqrt{27}.}$$

Pour le prouver, il faut exhiber un X de norme 1 tel que $|\nu(X)|^2 = 27$ $\quad$ donc exhiber x_1, x_2, x_3 tels que $|x_1|, |x_2|$ et $|x_3|$ soient ≤ 1 et tels que les inégalités précédentes soient des égalités.
D'après 3.a., $\quad |\nu(X)|^2 = \frac{1}{27}\left(|x_2 - x_1|^2 + |x_3 - x_1|^2 + |x_3 - x_2|^2\right)^3$ $\quad$ si et seulement si les trois nombres $|x_2 - x_1|, |x_2 - x_3|$ et $|x_3 - x_1|$ sont égaux.
Ensuite l'inégalité $\frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{3}x_k\right|^2\right)^3 \leq \frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3$ $\quad$ n'est une égalité que si $\sum_{k=1}^{3}x_k = 0$.

Enfin $\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2=3$ si et seulement si $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$ (compte tenu du fait qu'on veut $|x_1|,|x_2|$ et $|x_3|\leq 1$.)
Finalement, on prouvera que $\rho=\sqrt{27}$ si et seulement si on peut exhiber trois complexes x_1,x_2,x_3 tels que

$$\boxed{|x_2-x_1|=|x_2-x_3|=|x_3-x_1|,\ |x_1|=|x_2|=|x_3|=1 \text{ et } x_1+x_2+x_3=0.}$$

Un tel triplet existe

$$\boxed{\text{Il suffit de prendre } x_1=1, x_2=j \text{ et } x_3=j^2,}$$

où j est la racine cubique usuelle de l'unité. En effet la somme de ces trois complexes de module 1 est nulle et $|1-j^2|=|j^3-j^2|=|j^2||j-1|=|j-1|$ et $|j-j^2|=|j||1-j|=|1-j|=|j-1|$. On a donc bien

$$\boxed{\rho=\sqrt{27}.}$$

4. Une minoration du réel ρ :

a. Le terme général a_{pq} de la matrice $V(\Omega)$ est : $a_{pq}=(\omega_p)^{q-1}=e^{2i(p-1)(q-1)\pi/n}$.
Le terme général b_{mk} de la matrice $\overline{V(\Omega)}V(\Omega)$ est donc :
$b_{mk}=\sum_{s=1}^{n}\overline{a_{ms}}a_{sk}=\sum_{s=1}^{n}e^{-2i(m-1)(s-1)\pi/n}.e^{2i(s-1)(k-1)\pi/n}=\sum_{s=1}^{n}e^{2i(s-1)(k-1-m+1)\pi/n}=\sum_{s=1}^{n}e^{2i(s-1)(k-m)\pi/n}$.
Il s'agit de la somme des termes d'une progression géométrique de raison $r=e^{2i(k-m)\pi/n}$, qui vaut 1 si et seulement si $\dfrac{k-m}{n}$ est un entier ; cela ne peut se faire, puisque m et k sont entre 1 et n, que si $k=m$. On a alors $b_{mk}=\sum_{s=1}^{n}1=n$.
Si $k\neq m$, on a $b_{mk}=\dfrac{1-r^n}{1-r}=0$, puisque r est une racine n-ième de l'unité. Finalement :

$$\boxed{\overline{V(\Omega)}V(\Omega)=nI_n.}$$

b. On a donc $\det\left(\overline{V(\Omega)}\right).\det(V(\Omega))=\det(nI_n)=n^n$. Comme $\det\left(\overline{V(\Omega)}\right)=\overline{\det(V(\Omega))}$, cela donne

$$\boxed{|\det(V(\Omega))|=n^{n/2}.}$$

Puisque les ω_p sont de module 1, Ω est de norme 1. Comme $|\nu(\Omega)|=n^{n/2}$, on a donc

$$\boxed{\rho\geq n^{n/2}.}$$

5. Une inégalité de Hadamard :

a. Si $V_p=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $V_q=(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on trouve, sur la p-ième ligne de ${}^T\overline{M}$, les x_i et, sur la q-ième colonne de M, les y_i. Le terme général b_{pq} de ${}^T\overline{M}.M$ est donc $\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}y_i$, qui est donc nul si $p\neq q$, puisque $V_1,V_2,\ldots,V_n$ sont deux à deux orthogonaux.
Par contre, $b_{pp}=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=||V_p||_2^2$.

$$\boxed{\text{Si } V_1,V_2,\ldots,V_n \text{ sont deux à deux orthogonaux, } B={}^T\overline{M}.M \text{ est diagonale, de termes diagonaux } ||V_1||_2^2,\ldots,||V_n||_2^2.}$$

On a : $\det B=\det{}^T\overline{M}.\det M=\det\overline{M}.\det M=|\det M|^2$ et aussi : $\det B=||V_1||_2^2.\cdots.||V_n||_2^2$. Donc :

$$\boxed{|\det M|=||V_1||_2.\cdots.||V_n||_2.}$$

b. Puisque $U_1=V_1$, on a : $\det M(U_1,U_2,\ldots,U_n)=\det M(V_1,U_2,\ldots,U_n)$.
Ensuite $\det M(V_1,U_2,U_3,\ldots,U_n)=\det M(V_1,V_2,U_3,\ldots,U_n)$ car on ne change pas $\det M(V_1,U_2,U_3,\ldots,U_n)$ en ajoutant à la deuxième colonne le vecteur $proj_1(V_2)$, qui est colinéaire à la première colonne.
Supposons par récurrence (limitée au rang n) que $\det M(U_1,U_2,\ldots,U_n)=\det M(V_1,V_2,\ldots,V_{i-1},U_i,\ldots,U_n)$.
On ne change pas ce dernier déterminant en ajoutant à la i-ième colonne le vecteur $proj_{i-1}(V_i)$, qui est combinaison linéaire des $i-1$ premières colonnes. Donc $\det M(V_1,V_2,\ldots,V_{i-1},U_i,\ldots,U_n)=\det M(V_1,V_2,\ldots,V_i,U_{i+1},\ldots,U_n)$. On continue jusqu'au rang n :

$$\boxed{\det M(U_1, U_2, \dots, U_n) = \det M(V_1, V_2, \dots, V_n).}$$

c. $(V_1, \dots, V_n)$ sont supposés linéairement indépendants dans F_n de dimension n (il n'était pas nécessaire de préciser qu'aucun n'est nul). Ces vecteurs forment donc une base de F_n et $(U_1, \dots, U_n)$ n'est autre que la base orthogonale qu'on obtient à partir de la précédente par le procédé de Schmidt. Les U_i sont donc deux à deux orthogonaux. D'après a., on a donc $\det M(V_1, V_2, \dots, V_n) = \det M(U_1, U_2, \dots, U_n) = ||U_1||_2. \dots .||U_n||_2$.
V_i est la somme des deux vecteurs U_i et $W_i = proj_{i-1}(V_i)$. Par définition de la projection orthogonale, U_i et W_i sont orthogonaux. Pythagore donne : $||V_i||_2^2 = ||U_i||_2^2 + ||W_i||_2^2$. Donc $||U_i||_2 \leq ||V_i||_2$.
Donc $||U_1||_2. \dots .||U_n||_2 \leq ||V_1||_2. \dots .||V_n||_2$. En rassemblant :

$$\boxed{|\det M(V_1, V_2, \dots, V_n)| \leq ||V_1||_2. \dots .||V_n||_2.}$$

En multipliant membre à membre les inégalités $0 < ||U_i||_2 \leq ||V_i||_2$, on obtient ci-dessus une inégalité stricte sauf si toutes les inégalités $||U_i||_2 \leq ||V_i||_2$ sont des égalités donc si les W_i sont tous nuls. Or W_i est nul si et seulement si V_i est orthogonal à $V_1, \dots, V_{i-1}$. Donc

$$\boxed{|\det M(V_1, V_2, \dots, V_n)| = ||V_1||_2. \dots .||V_n||_2 \text{ si et seulement si } V_1, \dots, V_n \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

6. Une majoration du réel ρ : Notons que l'inégalité $|\det M(V_1, V_2, \dots, V_n)|^2 \leq ||V_1||_2^2. \dots .||V_n||_2^2$ est vraie même si la famille $V_1, \dots, V_n$ est liée, car alors $|\det M(V_1, V_2, \dots, V_n)|^2 = 0$.
Appliquons cette inégalité en prenant $V_1 = (1, x_1, \dots, x_1^{n-1}), \dots, V_n = (1, x_n, \dots, x_n^{n-1})$.
$M(V_1, \dots, V_n)$ est alors la transposée de $V(X)$, où $X = (x_1, \dots, x_n)$. et donc $|\det M(V_1, \dots, V_n)| = |\nu(X)|$.
Comme $||V_q||_2^2 = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)}$, l'inégalité donne :

$$\boxed{|\nu(X)|^2 \leq \prod_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)}.}$$

Pour X unitaire, les $|x_q|$ sont tous inférieurs à 1 et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)} \leq n$. Donc $|\nu(X)|^2 \leq n^n$ et

$$\boxed{|\nu(X)| \leq n^{\frac{n}{2}}.}$$

En particulier pour W unitaire tel que $|\nu(W)| = \rho$, cela donne : $\rho \leq n^{\frac{n}{2}}$. Comme on a obtenu auparavant l'inégalité inverse, on en déduit

$$\boxed{\rho = n^{\frac{n}{2}}.}$$

7. Recherche des vecteurs W :

a. Si X a deux coordonnées égales , $|\nu(X)|$ est nul donc $|\nu(W)| = \rho = n^{\frac{n}{2}}$ nécessite que W n'ait pas deux coordonnées égales.

$$\boxed{\text{Pour tout couple d'entiers } p \text{ et } q,\ p \neq q,\ x_p \neq x_q.}$$

b. Reprenons 6 :

$$\rho^2 = |\nu(W)|^2 \leq ||V_1||_2^2 \times \dots \times ||V_n||_2^2 = \prod_{q=1}^{n} \left(1 + |x_q|^2 + \dots + |x_q|^{2(n-1)}\right) \leq \prod_{q=1}^{n} (1 + \dots + 1) = n^n = \rho^2.$$

Les inégalités sont donc toutes des égalités. Notamment $\displaystyle\prod_{q=1}^{n} \left(1 + |x_q|^2 + \dots + |x_q|^{2(n-1)}\right) = \prod_{q=1}^{n} (1 + \dots + 1)$ ne peut se faire que si et seulement si

$$\boxed{x_1, \dots, x_n \text{ ont toutes un module égal à 1.}}$$

On peut aussi appliquer l'inégalité de Hadamard à la matrice de Van der Monde $V(W)$ elle-même, au lieu de sa transposée : Si $(S_1, \dots, S_n)$ sont ses colonnes, on a : $\rho^2 = |\nu(W)|^2 = |\det V(W)|^2 \leq ||S_1||_2^2. \dots .||S_n||_2^2$.
Or $S_k = \left(x_1^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}\right)$. Puisque tous les x_i sont de module 1, on a : $||S||_2 = \sqrt{n}$. Donc
$\rho^2 = |\det V(W)|^2 \leq ||S_1||_2^2 \times \dots \times ||S_n||_2^2 = n^n = \rho^2$. On est donc dans le cas d'égalité de Hadamard :

Les S_i sont donc orthogonaux deux à deux. En particulier, $S_2, \ldots, S_n$ sont tous orthogonaux à $S_1 = (1, \ldots, 1)$, ce qui se traduit par

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} x_p = 0, \quad \sum_{p=1}^{n} (x_p)^2 = 0 \,, \ldots, \; \sum_{p=1}^{n} (x_p)^{n-1} = 0.}$$

c. Petite faute d'énoncé : lire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ au lieu de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k$. Cela dit : $P_W(t) = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} (t - x_p)$ est un polynôme unitaire, donc :

$$\boxed{\alpha_n = 1.}$$

$\alpha_0 = P_W(0) = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} (-x_p)$: c'est un complexe de module 1.

$$\boxed{\text{On peut poser } \alpha_0 = -e^{i\theta_0} \text{ avec } \theta_0 \text{ réel.}}$$

d. $P_W(t) = (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n)$ donc
$P'_W(t) = (t - x_2) \cdots (t - x_n) + (t - x_1)(t - x_3) \cdots (t - x_n) + \cdots + (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_{n-1})$ donc,
pour $t \neq x_1, \ldots, x_n$: $F_W(t) = \dfrac{P'_W(t)}{P_W(t)} = \dfrac{1}{t - x_1} + \dfrac{1}{t - x_2} + \cdots + \dfrac{1}{t - x_n}$.

$$\boxed{\text{Sur l'ensemble de définition de } F_W, \text{ on a : } F_W(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{t - x_p}.}$$

Puisque x_p n'est pas nul, on a : $\dfrac{1}{t - x_p} = -\dfrac{1}{x_p} \times \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{t}{x_p}\right)}$. Pour $\left|\dfrac{1}{x_p}\right| < 1$, autrement dit pour $|t| < 1$ et en particulier pour t réel $\in]-1, 1[$, on peut écrire $\dfrac{1}{1 - \dfrac{t}{x_p}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{x_p^k}$, donc $\dfrac{1}{t - x_p} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{x_p^{k+1}}$.
Par addition, F_W est développable en série entière sur $]-1, 1[$. On peut dire aussi :

$$\boxed{\text{Il existe } R \geq 1 \text{ tel que } F_W \text{ soit développable en série entière sur }]-R, R[.}$$

(on peut même préciser que $R = 1$, car on peut montrer que le cercle de convergence du développement en série entière d'une fraction rationnelle passe par le pôle de cette fraction, pôle réel ou complexe, qui est le plus proche de O).

e. En ajoutant les développements, on obtient : $F_W(t) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x_p^{k+1}} \right) t^k$. Avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{f_k = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x_p^{k+1}}.}$$

x_p étant de module 1, $\dfrac{1}{x_p}$ est le conjugué de x_p, donc $\overline{f_k} = -\displaystyle\sum_{p=1}^{n} x_p^{k+1}$, qui est nul, d'après b., pour $k = 0, \ldots, n-2$. Donc

$$\boxed{\text{Les coefficients } f_0, f_1, \ldots, f_{n-2} \text{ sont nuls.}}$$

f. P'_W, fonction polynôme de degré $n-1$, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1, 1[$. L'unicité du développement fait que le coefficient de t^k est nul pour $k \geq n$.
Par ailleurs $P'_W(t) = P_W(t).F_W(t)$: P'_W apparaît comme produit de deux fonctions développables en séries entières sur $]-1, 1[$. Le développement de P'_W est donc le produit de Cauchy des deux développements mais, les coefficients $f_0, f_1, \ldots, f_{n-2}$ des premiers termes de F_W étant nuls, il en est de même des coefficients dans P'_W.
P'_W est donc un monôme de degré $n-1$. Comme P_W est unitaire :

$$\boxed{P'_W(t) = nt^{n-1} \text{ et } P_W(t) = t^n + \alpha_0.}$$

On a donc $P_W(t) = t^n - e^{i\theta_0}$. $\quad x_1, \dots, x_n$, qui sont les différents zéros de P_W, sont donc les diverses racines n-ièmes de $e^{i\theta_0}$, dans un ordre qu'on ne peut préciser puisque, de toute façon, si W est un vecteur répondant au problème posé, tout vecteur obtenu à partir de W par permutation des composantes convient aussi. Retenons :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \{x_1, \dots, x_n\} \text{ est égal à l'ensemble } \{e^{i(\theta_0+2k\pi)/n}, k = 1, \dots, n\}.}$$

Un tel vecteur a toutes ses composantes de module 1. On retrouve donc $||W|| = 1$. $||W||_2^2$ est la somme des carrés des modules des composantes de W donc $||W||_2 = \sqrt{n}$.

g. On ne s'est pas encore préoccupé de savoir si, réciproquement, les vecteurs W trouvés conviennent quel que soit le choix de θ_0 dans $\mathbb{R}$.
En fait, on sait depuis le début qu'il y a au moins une solution. Il existe donc un θ'_0 dans $\mathbb{R}$ tel que le vecteur $W' = (x'_1, \dots, x'_n)$, où $x'_k = e^{i(\theta'_0+2k\pi)/n}$, soit solution.
Pour θ_0 réel quelconque, les composantes $e^{i(\theta_0+2k\pi)/n}$ du vecteur $W = (x_1, \dots, x_n)$ sont obtenues par multiplication de celles de W' par le même complexe $e^{i(\theta_0-\theta'_0)/n}$, dont le module est 1.
En revenant à la formule, admise dans l'énoncé et qui donne la valeur du déterminant de Van der Monde, on voit que $|\nu(W)| = |\nu(W')| = \rho$. Le vecteur W est donc solution du problème, ainsi que tous ceux qui s'en désuisent par permutation des coordonnées, quel que soit le choix de θ_0.
Les coordonnées de W, élevées à la puissance n, donnent toutes $e^{i\theta_0}$. Si 1 figure parmi elles, c'est que $e^{i\theta_0} = 1^n = 1$. Les coordonnées de W sont donc les racines n-ièmes de l'unité, écrites dans un certain ordre.

$$\boxed{\text{Il y a donc } n! \text{ vecteurs } W \text{ dont l'une des coordonnées est égale à } 1.}$$

FIN DU CORRIGÉ