

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E .

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2 , on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E .
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.
3. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base \mathcal{U} , que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\text{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1 .
5. Montrer que :
 - i) $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
 - ii) $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.
6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X.$$

- 6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .
- 6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
- 6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4. et 5.
- 6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ .
- 6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
- 6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E .
- 6.7. Pour tous réels α et β , préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
- 6.8. Déterminer T_λ^{-1} .

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

- 1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X , son espérance et sa variance.

- 1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.
- 1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω .
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

- 2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
- 2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.
3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X , indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

- 3.1. Préciser $T(\Omega)$.
- 3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
- 3.3. Déterminer la loi de T .
- 3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2 .

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

2. On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.
- 2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
- 2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ' .
- 2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$.

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1, |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. Convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

9. On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Montrer qu'alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ converge.

On procédera comme à la question 4.2.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E .

On note : $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0 , S_1 et S_2 .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question 2.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X .

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN DU SUJET