e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

3. Limite de f en l'infini

3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

3.2. Déterminer la valeur de ℓ.

3.3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 3.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in\,]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

3.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.2. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.3. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n\, x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

3.4. En déduire que l'on a pour tout $x \in\,]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, $\ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1. On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2}I_n$.

Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.

Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

1.4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant : $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.

En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 5.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

4.1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

4.2. Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

* * * * * *

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1161 – D'après documents fournis