Corrigé de E3A 2019 PC math 2

Corrigé écrit par Nathalie Mercier (nathalie.mercier@prepas.org) et Claude Morin (claude.morin@prepas.org)

Question préliminaire :

En multipliant par l'expression conjuguée on obtient :

$$\int \frac{1}{x+ia}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-ia}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - \frac{i}{a}\int \frac{1}{1+(x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) - i\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x+ia}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) - i\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C}.$$

1.1 Au voisinage de 0 on a : $f_{\alpha,\lambda}(t) = t^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t} \sim t^\alpha$.

Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 0$

Si $\alpha = 0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 1$

Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = +\infty$

L'ensemble des couples (α,λ) tels que la limite est réelle est donc $\boxed{A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$.

1.2

- $\star$ $f_{\alpha,\lambda} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
- $\star$ <u>Étude en 0</u> : $f_{\alpha,\lambda}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ entraîne que $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$.
- $\star$ <u>Étude en $+\infty$</u> : comme $\lambda > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ donc $f_{\alpha,\lambda}(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

  On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout α.

L'ensemble des couples (α,λ) tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge est donc $\boxed{B =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*}$.

2.

- $\star$ Les deux fonctions considérées sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\star$ De $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $-\dfrac{1}{2} > -1$, on déduit que $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question **1.2** et les critères de comparaison.
- $\star$ De même, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ entraîne que $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \text{ et } t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0,+\infty[}.$$

3. Puisque la fonction cosinus est paire, $\boxed{\text{la fonction définie par } U(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ est paire}}$.

Puisque la fonction sinus est impaire, $\boxed{\text{la fonction définie par } V(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ est impaire}}$.

4. La fonction définie par $\varphi(u) = u^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. On peut donc effectuer le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ dans l'intégrale convergente $U(0)$:

$U(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u}2u\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$ avec le résultat admis par l'énoncé : $\boxed{U(0) = \sqrt{\pi}}$.

5.1 $W(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}(\cos(tx) + i\sin(tx))}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

Appliquons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. On pose $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$.

- ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $|f(x,t)| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ avec $-\dfrac{1}{2} > -1$ (question **1.2**).
- ⋆ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} = i\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t+ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| = |i\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t+ixt}| = \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t} = f_{\frac{1}{2},1}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ $\left(\dfrac{1}{2} > -1, \text{question } \mathbf{1.2}\right)$.

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } W \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } W'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t}$.

5.2 On intègre par parties en posant $u'(t) = \mathrm{e}^{-t+ixt}$ et $v(t) = i\sqrt{t}$, d'où $u(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{(-1+ix)}$ et $v'(t) = \dfrac{i}{2\sqrt{t}}$.
u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$|u(t)v(t)| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t}\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|-1+ix|}\sqrt{t}$ a pour limite 0 en 0 et aussi en $+\infty$ (par croissance comparée de $\sqrt{t}$ et e^t).
On peut donc écrire $W'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t+ixt} i\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+ixt}}{(-1+ix)} \frac{i}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
On en déduit $W'(x) = \dfrac{-i}{2(-1+ix)} W(x) = \dfrac{-1}{2(x+i)} W(x)$.

$\boxed{W \text{ est donc solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } W'(x) + \dfrac{1}{2(x+i)} W(x) = 0}$.

5.3 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
On montre par récurrence sur n que W est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On l'a montré pour $n = 1$.
Si on suppose W de classe $\mathcal{C}^n$ pour un entier n, l'égalité $W'(x) = \dfrac{-1}{2(x+i)} W(x)$ montre que W' est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, donc W est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On a montré que W est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
U et V désignant les parties réelle et imaginaire de W, $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont aussi de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

5.4 $U'(x) + iV'(x) = W'(x) = \dfrac{-W(x)}{2(x+i)} = -\dfrac{(x-i)(U(x)+iV(x))}{2(x^2+1)} = -\dfrac{xU(x)+V(x)+i(-U(x)+xV(x))}{2(x^2+1)}$.
On en déduit en séparant partie réelle et partie imaginaire :
$\boxed{U'(x) = -\dfrac{xU(x)+V(x)}{2(x^2+1)}}$ et $\boxed{V'(x) = \dfrac{U(x)-xV(x)}{2(x^2+1)}}$ pour tout x réel.

6. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $|g(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},\lambda}(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par la question 1.2 $(-\dfrac{1}{2} > -1)$.
$\boxed{g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

7.1 Effectuons le changement de variable affine $u = n\pi + t$ dans l'intégrale qui définit a_n :

$$a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{e}^{-\lambda u} \sin(u)\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{n\pi + t}} \mathrm{e}^{-\lambda(n\pi+t)} \sin(n\pi + t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$ on a bien $\boxed{a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(n\pi+t)}}{\sqrt{n\pi + t}} \sin(t)\,\mathrm{d}t}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

7.2 La suite $n \mapsto t + n\pi$ étant croissante, la suite $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t + n\pi}} \times \mathrm{e}^{-(t+n\pi)}$ est décroissante (produit de deux suites positives et décroissantes).
Comme $\sin(t) \geqslant 0$ quand $0 \leqslant t \leqslant \pi$, on en déduit que la suite $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante}}$.

7.3 Puisque $\lambda(t + n\pi) > 0$ et $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a pour $n > 0$: $0 \leqslant a_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{n\pi}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ a pour limite } \ell = 0}$.

8.1 On applique le théorème spécial des séries alternées.
Si une série $(\sum(-1)^n a_n)$ est telle que la suite (a_n) est positive, décroissante et a pour limite 0, alors la série converge et sa somme S a le signe du premier terme. $\boxed{(\sum(-1)^n a_n) \text{ converge}}$.

8.2 Puisque le premier terme a_0 est strictement positif on en déduit par le théorème précédent que $\boxed{S > 0}$.

8.3 $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{(N+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles.
Puisque la série converge et que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on peut passer à la limite et obtenir $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = S}$.

9. Pour $x > 0$, le changement de variable affine $u = tx$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a donc $V(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
On reconnait l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ dans laquelle on a posé $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Cette intégrale étant strictement positive d'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{V(x) > 0 \text{ pour } x > 0}$.

10.1 Comme $V > 0$, R et T sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus U et V sont continues sur $\mathbb{R}$ (question **5.3**).
On sait que $U(0) = \sqrt{\pi}$ d'après la question **4**. De plus $V(0) = 0$ (expression de V donnée en question **2**).
On en déduit que $\boxed{R \text{ est prolongeable par continuité en } 0^+ \text{ en posant } R(0) = U(0) = \sqrt{\pi}}$.
Comme $V(x) > 0$ pour $x > 0$ d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} V(x) = 0^+$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{U(x)}{V(x)} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} T(x) = \frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $\boxed{T \text{ est prolongeable par continuité en } 0^+ \text{ en posant } T(0) = \dfrac{\pi}{2}}$.

10.2 $\star$ U et V sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $U^2 + V^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient par composition que $\boxed{R \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

- ⋆ De même, $\dfrac{U}{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition que $\boxed{T \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

10.3 ⋆ Dérivons : $R' = \dfrac{UU' + VV'}{R}$. D'après la question **5.4**, $(UU' + VV')(x) = \dfrac{-x(U^2(x) + V^2(x))}{2(x^2+1)}$.

On en déduit que R vérifie l'équation différentielle : $\boxed{y'(x) + \dfrac{x}{2(x^2+1)}y(x) = 0}$.

⋆ De même, $T' = \dfrac{VU' - UV'}{V^2}\dfrac{1}{1+(\frac{U}{V})^2} = \dfrac{VU' - UV'}{U^2+V^2}$. D'après la question **5.4**, $(VU' - UV')(x) = \dfrac{-(U^2(x) + V^2(x))}{2(x^2+1)}$.

On en déduit que T vérifie l'équation différentielle : $\boxed{y'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+1)}}$.

10.4 ⋆ D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y'(x) + \dfrac{x}{2(x^2+1)}y(x) = 0$ sont de la forme $y(x) = K_1 \exp[-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)] = \dfrac{K_1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$, avec $K_1 \in \mathbb{R}$: $\boxed{y(x) = \dfrac{K_1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$.

⋆ Il s'agit d'une primitive connue. On obtient donc comme solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+1)}$: $\boxed{y(x) = -\dfrac{1}{2}\arctan(x) + K_2}$, avec $K_2 \in \mathbb{R}$.

10.5 On utilise la question **10.1**.

⋆ On obtient sur $\mathbb{R}_+$: $R(x) = \dfrac{R(0)}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$, soit : $\boxed{R(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$ pour $x \geqslant 0$.

⋆ De même on obtient sur $\mathbb{R}_+$: $T(x) = T(0) - \dfrac{1}{2}\arctan(x)$, soit : $\boxed{T(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arctan(x)}$ pour $x \geqslant 0$.

11 On déduit des expressions de R et T données en question **10** que $U = V\tan(T)$, donc $R^2 = V^2(1+\tan^2(T))$, et $V^2 = R^2\cos^2(T)$.

⋆ Comme $T = \arctan(U/V)$ et $T(0) = \pi/2$, T est à valeurs dans $]-\pi/2, +\pi/2]$ donc $\cos(T) \geqslant 0$. Comme V et R sont à valeurs positives ou nulles, on en déduit $V = R\cos(T)$ sur $\mathbb{R}^+$.

On obtient alors sur $\mathbb{R}_+$: $V(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$.

On remarque que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et coïncide avec V sur $\mathbb{R}_+$. Or V est impaire.

On en déduit que $\boxed{V(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

⋆ De $U = V\tan(T)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit : $U(x) = \dfrac{V(x)}{\tan(\frac{1}{2}\arctan(x))} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$, qui est valable aussi pour $x = 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est paire, et coïncide avec U sur $\mathbb{R}_+$. U est paire. On obtient de même que pour V : $\boxed{U(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

12 Résolvons l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène de la question **5.2** :
$y'(x) + \dfrac{1}{2(x+i)} y(x) = 0$.

D'après la question préliminaire, $\displaystyle\int \frac{1}{x+i}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - i\arctan(x) + C$.

On obtient donc les solutions sur $\mathbb{R}$: $y(x) = K\exp\left[-\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) + \dfrac{i}{2}\arctan(x)\right] = \dfrac{K}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\exp\left[\dfrac{i}{2}\arctan(x)\right]$.

Comme $W(0) = \sqrt{\pi}$, on obtient : $\boxed{W(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\exp\left[\dfrac{i}{2}\arctan(x)\right]}$ pour tout x réel.

En prenant les parties réelle et imaginaire de W, on retrouve bien les expressions des fonctions U et V obtenues en question **11**.

13 Les existences des U_n et V_n sur $\mathbb{R}$ proviennent du même raisonnement que celui utilisé en question **2**, $f_{-\frac{1}{2},1}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

13.1 Calculons pour tout x réel : $U_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\frac{1+\cos(2xt)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(U(0)+U(2x))$.

De même, $V_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\frac{1-\cos(2xt)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(U(0)-U(2x))$.

On obtient $\boxed{U_2(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{\pi}+U(2x))}$ et $\boxed{V_2(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{\pi}-U(2x))}$ pour tout x réel.

13.2 On remarque que les fonctions U_n sont paires, et que $U_n(0) = U(0) = \sqrt{\pi}$.
Soit maintenant $x > 0$ fixé.
On peut écrire $|U_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t$ où l'on a posé $h_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,|\cos^n(xt)| = f_{-\frac{1}{2},1}(t)\,|\cos(xt)|^n$.
Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite des $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- ⋆ Les fonctions h_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ Étudions la convergence simple de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc de la suite $(f_{-\frac{1}{2},1}(t)\,|\cos(xt)|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ à t fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.
  Il s'agit d'une suite géométrique de raison $|\cos(xt)|$, on doit donc distinguer selon que $|\cos(xt)| = 1$ ou $|\cos(xt)| < 1$. Or $|\cos(xt)| = 1$ si et seulement si $t \in (\pi/x)\mathbb{N}^*$. Notons $A = \left\{\dfrac{k\pi}{x}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
  On en déduit que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_{-\frac{1}{2},1}\,\mathbb{1}_A$, où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.
- ⋆ La fonction $\mathbb{1}_A$ est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ car sur tout segment elle admet un nombre fini de discontinuités avec existence de limites à gauche et à droite en tout point de discontinuité. La fonction $\mathbb{1}_A$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_{-\frac{1}{2},1}\,\mathbb{1}_A$ aussi.
- ⋆ Pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et tout n de $\mathbb{N}$, $|h_n(t)| \leq f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. D'après la question **1.2**, $f_{-\frac{1}{2},1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

On conclut par le théorème que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_{-\frac{1}{2},1}\,\mathbb{1}_A = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0$.

Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(0) = \sqrt{\pi}, \text{ et pour tout } x \text{ réel non nul, } \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0}$.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{\pi}\,\mathbb{1}_{\{0\}}$.