E3A PC 2019 Mathématiques 1 – Un corrigé

EXERCICE 1

1 – La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.1 – La suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{p\geq 0}\frac{1}{n+p}$

L'équivalent $\frac{1}{n+p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}$ nous informe en outre de sa divergence. De ces deux points :

La suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.2 – Comme $\lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty$, on a pour $A = 2$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, s_p \geq 2$. En particulier pour $p = N$ on a $s_p \geq 2 > 1$.

3 – Comme $a_n = n + p_n$ on a $a_n \geq n$ d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc divergente.

4 – On a pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$, cette inégalité étant stricte pour $k = n-1$ (on rappelle que $n \geq 2$ et donc $n-1 > 0$). En sommant ces inégalités on obtient donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} = 1}.$$

Pour la seconde somme, on procède par récurrence. On appelle HR_n la propriété à démontrer.

- HR_2 signifie $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1$; or $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ donc HR_2 est vraie.
- Soit $n \geq 2$ tel que HR_n soit vraie ; ainsi $\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k} > 1$ ce qui peut aussi s'écrire : $\sum_{k=n}^{3n-2}\frac{1}{k} > 1$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=n+1}^{3n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{3n-2}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$$

D'après HR_n on a donc :

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k} > 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n} + \frac{6n}{9n^2-1}$$

Or $\frac{6n}{9n^2-1} > \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3n}$ et finalement $\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k} > 1$ ce qui établit HR_{n+1}.

On vient de prouver par récurrence que pour $n \geq 2$ on a bien $\boxed{\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k} > 1}$.

5 – La première des inégalités ci-dessus nous indique que $p_n > n$ et donc $a_n > 2n$, tandis que la seconde nous indique que $p_n \leq 2n-2$ et donc que $a_n \leq 3n-2$. On en déduit l'encadrement :

$$2 < u_n \leq \frac{3n-2}{n}.$$

Donc si (u_n) a une limite ℓ on a par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus :

$$2 \leq \ell \leq 3$$

6 – Par définition de a_n on a : $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} > 1$ et $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leq 1$.

Donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1$; on déduit de cette dernière inégalité que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$ et on a bien l'encadrement :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

7 – La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$, donc pour $k \geq 1$ et $t \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{k+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{k}$ et en intégrant : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$. On somme alors ces inégalités pour *k* entre 1 et $a_n - 1$:

$$\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k+1} \leq \int_n^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Ou de façon plus explicite :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1}$$

Or on a déjà vu (question 6) que par minimalité $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1$, et par ailleurs que $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n}$, donc que $1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n}$. On a donc bien :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1$$

8 – En calculant l'intégrale, on obtient : $1 - \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1$. Donc on obtient avec l'appui de la maréchaussée : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$, puis en composant par l'exponentielle : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$. *En d'autres termes,* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}$.

EXERCICE 2

1 – Vérifions d'abord la linéarité. On se donne $P,Q\in\mathbb{R}_{2n}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\phi_a(P+\lambda Q)&=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)(P+\lambda Q)'+aX(P+\lambda Q)\\&=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)P'+aXP+\lambda\left(\left(\frac{1}{4}-X^2\right)Q'+aXQ\right)\\&=\phi_a(P)+\lambda\phi_a(Q)\end{aligned}$$

La linéarité étant établie il reste à montrer que $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est stable par ϕ_a ; il suffit pour cela de vérifier l'image des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ est bien dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$. On se donne donc $k\in[\![0,2n]\!]$; on a alors :

$$\phi_a\left(X^k\right)=\begin{cases}(a-k)X^{k+1}+\dfrac{k}{4}X^{k-1}\text{ si }k\neq 0\\ aX\text{ sinon}\end{cases}$$

Donc sachant $2n\geq 2$ on a pour tout $k\in[\![0,2n-1]\!]$: $\phi_a\left(X^k\right)\in\mathbb{R}_{2n}[X]$; par ailleurs $\phi_a\left(X^{2n}\right)\in\mathbb{R}_{2n}[X]\Leftrightarrow a=2n$ et on peut conclure :

ϕ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ si et seulement si $a=2n$.

On suppose désormais conformément à l'énoncé que $a=2n$.

2 – Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\phi_a(P)&=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)\left(\alpha\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}+\beta\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\right)+2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}\\&=-\alpha\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta+1}-\beta\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}+2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que cette dernière formule reste vraie même si α ou β est nul.
On continue :

$$\begin{aligned}\phi_a(P)&=\left(-\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right)-\beta\left(X+\frac{1}{2}\right)+2nX\right)P\\&=\left((2n-\alpha-\beta)X+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)P\end{aligned}$$

De là on a par identification :

$$\phi_a(P)=\lambda P\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2n\\\alpha-\beta=2\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=n+\lambda\\\beta=n-\lambda\end{cases}$$

Reste à vérifier que $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$: la condition $\lambda\in[\![-n,n]\!]$ assure que α et β sont bien des entiers naturels, et que P est un polynôme. On a en outre $\alpha+\beta=2n$ donc $\deg(P)=2n$ et $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } \lambda \in [\![-n,n]\!], \text{ et } \alpha,\beta \in \mathbb{N}, \text{ le polynôme } P = \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta} \text{ vérifie } \phi_a(P) = \lambda P \text{ si et seulement si } \begin{cases} \alpha = n+\lambda \\ \beta = n-\lambda \end{cases}.}$$

3 – On vient de prouver que les entiers $\lambda \in [\![-n,n]\!]$ sont valeurs propres ; on dispose ainsi de $2n+1$ valeurs propres, et ϕ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ qui est de dimension $2n+1$. Donc ϕ_a a au plus $2n+1$ valeurs propres et ainsi : $\mathrm{Sp}(\phi_a) = [\![-n,n]\!]$ et les sous-espaces propres sont des droites. On dispose d'un vecteur non nul de chaque sous-espace propre, qui en constitue donc une base.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_a) = [\![-n,n]\!] \text{ et pour } \lambda \in [\![-n,n]\!] \text{ on a : } E_\lambda(\phi_a) = \mathrm{Vect}\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}\right)}$.

Avec les images calculées à la question 1, la matrice M de ϕ_a dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & & & \\ 2n & 0 & 2/4 & & \\ & 2n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2n/4 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et le spectre de M est $[\![-n,n]\!]$. De là si on pose $B = M + nI_{2n}$ on a alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_{2n}) = 0 \Leftrightarrow \det(M - (\lambda - n)I_{2n}) = 0 \Leftrightarrow \lambda - n \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow \lambda - n \in [\![-n,n]\!]$

Donc $\mathrm{Sp}(B) = [\![0,2n]\!]$ et les coefficients diagonaux de B sont tous égaux à n.

5 – On a ainsi $\mathrm{Sp}(\phi_a + n\,\mathrm{Id}) = [\![0,2n]\!]$.

Or si f est un endomorphisme d'un espace E, λ une valeur propre de f et si x est un vecteur propre associé, on a $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ ce qui montre que λ^2 est valeur propre de f^2.

Donc en considérant l'endomorphisme $(\phi_a + n\,\mathrm{Id})^2$, cet endomorphisme a pour valeur propres 0, 1, 4, 9,…, $(2n)^2$ (et il n'y en a pas d'autre : on vient de trouver $2n+1$ valeurs propres distinctes pour un endomorphisme d'un espace de dimension $2n+1$).

<u>EXERCICE 3</u>

1.1 – Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ on a $\Phi(u) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \end{cases}$. Or il existe une seule suite u vérifiant la relation de récurrence d'ordre 3 définissant $\mathcal{E}$ et ayant trois conditions initiales fixées. En d'autres termes, Φ est bijective, et on a explicitement :

$\Phi^{-1}(a,b,c)=u$ où u est la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\begin{cases} a \text{ si } n\equiv 0\,[3] \\ b \text{ si } n\equiv 1\,[3] \\ c \text{ si } n\equiv 2\,[3] \end{cases}$

1.2 – Φ est par ailleurs clairement linéaire et constitue donc un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$. Par suite on a $\dim(\mathcal{E})=3$.

2.1 – Comme Φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{E}$, l'image par Φ^{-1} d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathcal{E}$. Donc (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathcal{E}$.

2.2 – Avec la caractérisation de $\Phi^{-1}(a,b,c)$ énoncée lors de la question 1.1, on peut dire en posant $e_1=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_2=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $e_3=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on a pour tout entier naturel n :

$$u_n=\begin{cases} 1 \text{ si } n\equiv 0\,[3] \\ 0 \text{ si } n\equiv 1\,[3] \\ 0 \text{ si } n\equiv 2\,[3] \end{cases},\quad v_n=\begin{cases} 0 \text{ si } n\equiv 0\,[3] \\ 1 \text{ si } n\equiv 1\,[3] \\ 0 \text{ si } n\equiv 2\,[3] \end{cases} \text{ et } w_n=\begin{cases} 0 \text{ si } n\equiv 0\,[3] \\ 0 \text{ si } n\equiv 1\,[3] \\ 1 \text{ si } n\equiv 2\,[3] \end{cases}$$

3 – Appelons $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$. On remarque ainsi que pour $u,v\in\mathcal{E}$ on a : $(u|v)=\langle\Phi(u)|\Phi(v)\rangle$. Il résulte alors de la bilinéarité de Φ et du fait que $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ soit un produit scalaire que $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire positive. Reste à montrer qu'elle est définie. On se donne donc $u\in\mathcal{E}$ telle que $(u|u)=0$. On a alors $\langle\Phi(u)|\Phi(u)\rangle=0$ et donc $\Phi(u)=0$, et par injectivité de Φ on en déduit alors $u=0$, ce qui achève la preuve : $(\,.\,|\,.\,)$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

4 – Pour $i,j\in[\![1,3]\!]$ on a : $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)=\langle\Phi(\varepsilon_i)|\Phi(\varepsilon_j)\rangle=(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$ (on rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique). On a prouvé que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$ et à ce titre elle est libre. Comme $\dim(\mathcal{E})=3$ c'est donc une base, et ainsi : $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathcal{E}$.

5.1 – Montrons d'abord la linéarité : on se donne $u,v\in\mathcal{E}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, et on pose $a=d(u)$, $b=d(v)$ et $c=d(u+\lambda v)$.
On a alors pour tout n : $c_n=u_{n+1}+\lambda v_{n+1}=a_n+\lambda b_n$, et donc $c=a+\lambda b$ d'où : $d(u+\lambda v)=d(u)+\lambda d(v)$: d est bien linéaire.
Soit maintenant $u\in\mathcal{E}$ et $w=d(u)$. On a alors pour tout n : $w_{n+3}=u_{n+4}=u_{n+1}=w_n$, donc $w\in\mathcal{E}$
Il résulte de ces deux points que d est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5.2 – Les quatre premiers termes de ε_1 sont : $(1,0,0,1)$ et donc les trois premiers de $d(\varepsilon_1)$ sont $(0,0,1)$. Ainsi $\Phi(d(\varepsilon_1))=\Phi(\varepsilon_3)$ et par injectivité : $d(\varepsilon_1)=\varepsilon_3$.

On établit de même que $d(\varepsilon_2)=\varepsilon_1$ et $d(\varepsilon_3)=\varepsilon_2$. Donc la matrice M de d dans $\mathcal{B}$ est :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

5.3 – Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ on a $\chi_M(\lambda)=-\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}$.

On retranche L_3 à L_2 et on obtient :

$$\chi_M(\lambda)=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\-1&-\lambda-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda-1\end{vmatrix}$$

Et finalement : $\chi_M(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$. Le discriminant du trinôme $\lambda^2+\lambda+1$ étant <0, χ_M n'est pas scindé et M n'est pas diagonalisable.
Par suite, d n'est pas diagonalisable.

5.4 – On remarque que comme 1 est valeur propre simple de M et donc de d, alors l'ensemble $\mathcal{D}$ des invariants est une droite. Or la suite constante à 1 est visiblement invariante par d, donc $\mathcal{D}$ est la droite engendrée par la suite constante à 1. Concrètement, $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des suites constantes.

5.5 – La matrice M de d dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est visiblement une matrice orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$). De ce fait, $\boxed{d \text{ est une isométrie de } \mathcal{E}}$.
Pour $u\in\mathcal{E}$ on pose $v=d^3(u)$; on a alors $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_{n+3}=u_n$, donc $v=u$ et ce pour tout $u\in\mathcal{E}$; donc $d^3=\mathrm{Id}$.

5.6 – Appelons U la suite constante égale à 1. On a pour $u\in H$:

$$(d(u)|U)=(d(u)|d(U))=(u|U)=0$$

(la première égalité car U est invariant, la seconde car d est une isométrie, la dernière car H est l'orthogonale de $\mathcal{D}=\mathrm{Vect}(U)$). Donc $d(u)\perp U$ et ainsi $d(u)\in H$. On a bien montré que H est stable par d.

5.7 – Soit $\tilde{d}$ l'endomorphisme induit par d sur H. Si on considère une base $\mathcal{B}_H=(V,W)$ de H, alors (U,V,W) est une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de d a la décomposition par bloc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(d)=\begin{pmatrix}1&0_{1,2}\\0_{2,1}&A\end{pmatrix}\text{, où } A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_H}(\tilde{d})$$

De là $\det(d)=\det(A)=\det(\tilde{d})$. Or avec le 5.3 : $\det(d)=-\chi_M(0)=1$, donc $\det(\tilde{d})=1$. Ainsi $\tilde{d}$ est une isométrie (car restriction d'une isométrie) positive du plan H, donc $\tilde{d}$ est une rotation.

Soit θ l'angle de cette rotation (en supposant avoir orienté préalablement H). On déduit de $d^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ que $\tilde{d}^3 = \mathrm{Id}_H$ et donc que $3\theta \equiv 0\,[2\pi]$, puis que $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Ainsi l'angle de cette rotation peut être 0, $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π. $\theta = 0$ est à rejeter car sinon les restrictions de d aux espaces supplémentaires $\mathcal{D}$ et H seraient l'identité, ce qui amènerait $d = \mathrm{Id}$ ce qui n'est pas le cas. Il reste donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$, le signe étant lié à l'orientation choisie sur H.

Il serait possible d'aller plus loin en choisissant une base de H comme directe, et de déterminer le signe de θ pour ce choix d'orientation, mais cela ne me semble pas dans l'esprit du programme.

EXERCICE 4

1 – On a pour $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

2 – Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, et f l'endomorphisme associé à M. Si on appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$ on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M$. On sait qu'il existe alors une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^d$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f) = N$.

Par suite : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^p) = M^p$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f^p) = N^p$. M^p et N^p apparaissant ainsi comme deux matrices d'un même endomorphisme, elles sont alors semblables.

Complétons ce résultat pour la suite : si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}MP = N$, alors P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, et en appliquant la formule de changement de base sur les matrices de f^p on obtient $P^{-1}M^pP = N^p$.

3.1 – Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(1-(-1)^n\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ est pair}}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc en ne gardant que les valeurs impaires de la sommation :

$$s(z) = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Or $\mathrm{i}^{2p+1} = (-1)^p\,\mathrm{i}$, ce qui permet de conclure :

$$s(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

3.2 – On établit de même : $c(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!}$

4 – Pour $m\in\mathbb{N}$ on a : $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\gamma I_2)^{2n+1}=\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\gamma^{2n+1}\right)I_2\xrightarrow[m\to+\infty]{}s(\gamma)I_n$.

Donc $\varphi(\gamma I_2)$ existe et $\varphi(\gamma I_2)=s(\gamma)I_2$.

5.1 – C'est une question de cours : A étant une matrice de taille 2 ayant deux valeurs propres distinctes $\alpha\neq\beta$, A est alors semblable $B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, et donc il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP=B$.

5.2 – On se donne $m\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\begin{pmatrix}\alpha^{2n+1} & 0\\ 0 & \beta^{2n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n\beta^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}$$

Puis en utilisant le théorème de 'limite par coordonnées' :

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}=\begin{pmatrix}s(\alpha) & 0\\ 0 & s(\beta)\end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{\varphi(B)\text{ existe et }\varphi(B)=\begin{pmatrix}s(\alpha) & 0\\ 0 & s(\beta)\end{pmatrix}}$.

On regarde maintenant $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}PB^{2n+1}P^{-1}=P\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}$.

Par continuité (car linéaire en dimension finie) de $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mapsto P^{-1}MP$ on a alors :

$$\lim_{m\to+\infty}P\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}\right)P^{-1}=P\varphi(B)P^{-1}$$

Donc : $\boxed{\varphi(A)\text{ existe et }\varphi(A)=P\varphi(B)P^{-1}}$.

6.1 – On sait que toute matrice complexe est trigonalisable (le polynôme caractéristique est toujours scindé sur $\mathbb{C}$). Donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, et par invariance du polynôme caractéristique pour des matrices semblables, celle-ci se présente sous la forme $C=\begin{pmatrix}\alpha & y\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$. En d'autres termes, il existe $Q\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ=C$.

6.2 – On pose $J=\begin{pmatrix}0 & y\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ de sorte que $A=\alpha I_2+J$. αI_2 et J commutent et de plus $J^2=0$.

Donc pour $n \geq 1$: $C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \underbrace{J^k}_{=0 \text{ si } k\geq 2} = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1} J$. *On notera que la formule reste vraie pour* $n = 0$. Explicitement :

$$C^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

6.3 – On calcule d'abord $\varphi(C)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} & \displaystyle y \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{pmatrix}$$

Et par calcul de limite par coordonnées on obtient :

$\varphi(C)$ existe et $\varphi(C) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Par un raisonnement analogue au 5.2 on a alors :
$\varphi(A)$ existe et $\varphi(A) = Q\varphi(C)Q^{-1}$.

7 – Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé et on est dans l'un des deux cas abordés lors des questions 5 et 6. Dans chacun de ces deux cas $\varphi(A)$ existe, ce qui en assure l'existence dans tous les cas.

8 – S'il existait $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(X) = T$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1^er^ cas : si X a deux valeurs propres distinctes α et β.

Alors on a vu que T serait semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$, et par invariance du polynôme caractéristique on aurait $s(\alpha) = s(\beta) = 1$ et donc T serait semblable à I_2 qui n'est semblable qu'à elle-même. Donc $T = I_2$ ce qui est gênant ! Cette hypothèse doit donc être rejetée.

2^ième^ cas : si X a une valeur propre double α.

On a alors vu qu'il existe un complexe y tel que T soit semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Pour la même raison on a $s(\alpha) = 1$. Mais $s(\alpha)^2 + c(\alpha)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$, ce qui entraîne $c(\alpha) = 0$ et à nouveau T serait semblable à I_2 ce qui conduit à la même contradiction.

On peut conclure qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(X) = T$.