Corrigé de E3A 2018 PC math 2

Corrigé écrit par Nathalie Mercier (nathalie.mercier@prepas.org) et Claude Morin (claude.morin@prepas.org)

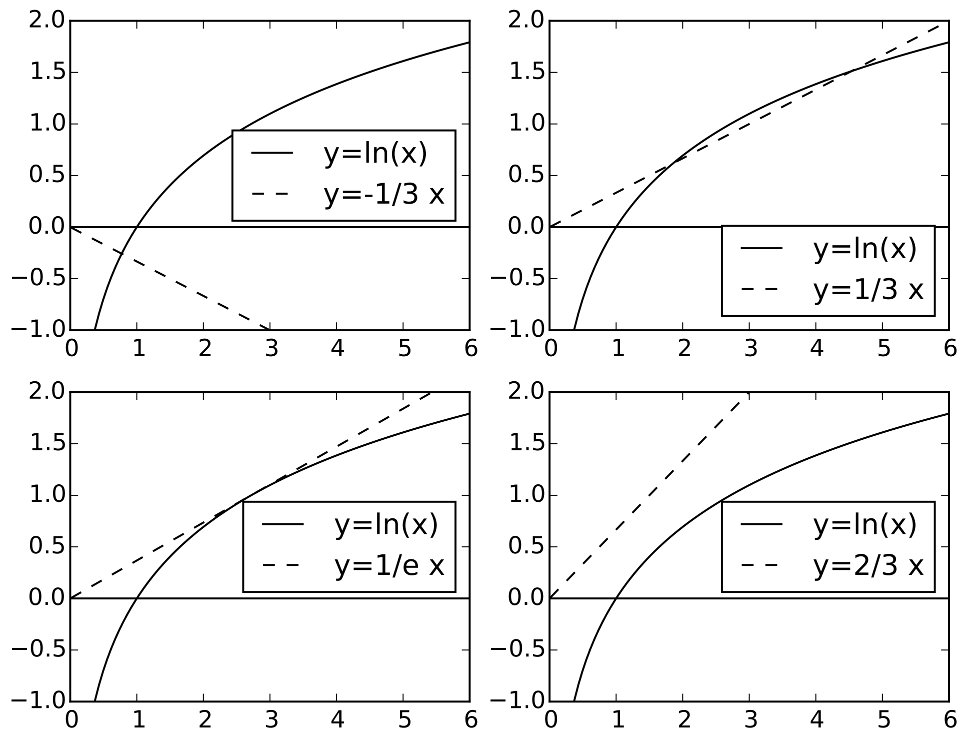
Partie I. Étude de l'équation (E_a) : $\ln(x) = ax$

1. Étudions la fonction définie pour $x > 0$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Son tableau de variations se construit en calculant $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ ainsi que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$:

x	0		1		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Puisque g est continue et strictement monotone sur les intervalles $]0, e]$ et $[e, +\infty[$, on lit sur son tableau de variations le nombre de solutions de l'équation (E_a) qui s'écrit $g(x) = a$:
Si $a \leqslant 0$ il y a une unique solution $\alpha \in]0, 1]$ avec $\alpha = 1$ quand $a = 0$.
Si $a \in]0, e^{-1}[$ il y a exactement deux solutions, $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
Si $a = e^{-1}$ il y a une unique solution $\alpha = e$.
Si $a > e^{-1}$ il n'y a pas de solution.

2. Voici quatre graphiques correspondant aux cas $a = -\dfrac{1}{3}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $a = \dfrac{1}{e}$ et $a = \dfrac{2}{3}$:



Partie II. Étude d'une équation fonctionnelle

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (R) :
$\mathcal{S} = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)\right\}$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $\tilde{\lambda}$ la fonction constante sur $\mathbb{R}$ valant λ.
$\tilde{\lambda} \in \mathcal{S} \iff \lambda = \lambda^2 \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1)$.

$\boxed{\text{Il existe donc exactement deux fonctions constantes sur } \mathbb{R} \text{ solutions de } (R) : \tilde{0} \text{ et } \tilde{1}.}$

2. Soit φ une solution de (R).

- Supposons $\varphi(0) = 0$. En appliquant (R) au couple $(x,0)$, on obtient :
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x+0) = \varphi(x)\varphi(0)$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$. φ est la fonction identiquement nulle.
- La réciproque est évidente.
  Conclusion : $\boxed{\varphi(0) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0}$.

3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.

(a) On déduit de (R) appliquée à $(0,0)$ que : $\varphi(0) = \varphi(0)^2$.
Comme on a supposé $\varphi(0) \neq 0$, on obtient $\boxed{\varphi(0) = 1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- En appliquant (R) à $(x/2, x/2)$, on obtient : $\varphi(x) = [\varphi(x/2)]^2$, d'où $\varphi(x) \geqslant 0$.
- En appliquant (R) à $(x, -x)$, on obtient : $\varphi(0) = \varphi(x)\varphi(-x) = 1$, d'où $\varphi(x) \neq 0$.

Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence $\mathcal{H}_n$: « $\varphi(nx) = (\varphi(x))^n$ ».
  - ⋆ Comme $\varphi(0) = 1$, $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
  - ⋆ Supposons $\mathcal{H}_n$. En appliquant (R) à (nx, x), on obtient $\varphi(nx + x) = \varphi(nx)\varphi(x)$ et en utilisant $\mathcal{H}_n$, $\varphi((n+1)x) = (\varphi(x))^{n+1}$: $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

  On a montré : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(nx) = (\varphi(x))^n}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}_-$. En appliquant (R) à $(nx, -nx)$, on obtient : $\varphi(nx)\varphi(-nx) = 1$.
  On en déduit, en utilisant la relation obtenue pour $-n$ entier naturel,
  $\varphi(nx) = \dfrac{1}{\varphi(-nx)} = \dfrac{1}{(\varphi(x))^{-n}} = (\varphi(x))^n$.

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(nx) = (\varphi(x))^n}$.

(c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la relation ci-dessus à $n = m$ et $x = 1/m$: $\varphi\left(m.\dfrac{1}{m}\right) = \left(\varphi\left(\dfrac{1}{m}\right)\right)^m$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.}$$

(d) Soit $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On déduit des questions précédentes, en se rappelant que $\varphi > 0$:
$\varphi\left(n.\dfrac{1}{m}\right) \underset{(b)}{=} \left(\varphi\left(\dfrac{1}{m}\right)\right)^n \underset{(c)}{=} \left(\varphi(1)^{\frac{1}{m}}\right)^n = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite (x_n) représente le développement décimal de x. On peut écrire :
$|x - x_n| = |10^{-n}.10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor .10^{-n}| = 10^{-n}|10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor| \leqslant 10^{-n}$
On déduit du théorème d'encadrement et de $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$ que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x}$.

(f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}, x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Comme $(\lfloor 10^n x \rfloor, 10^n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on déduit de (d) que $\varphi(x_n) = (\varphi(1))^{x_n}$.
On déduit de la continuité de φ sur $\mathbb{R}$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$.
Par ailleurs, la fonction $y \mapsto (\varphi(1))^y$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{x_n} = (\varphi(1))^x$.
Finalement, par unicité de la limite, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (\varphi(1))^x}$.

Partie III. Étude d'une suite de polynômes

1. (a) De la relation définissant P_n, on obtient : $\boxed{P_1 = X}$ et $\boxed{P_2 = \frac{1}{2}X(X+2)}$.

(b) De même, $\boxed{P_0(0) = 1}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(0) = 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

⋆ Les polynômes étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$P_n'(x) = \dfrac{1}{n!}(x+n)^{n-2}[(x+n)+(n-1)x] = \dfrac{1}{n!}(x+n)^{n-2}n(x+1) = \dfrac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2}$.

En effet on peut écrire $\quad \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!} \quad$ car $n \neq 0$.

⋆ Par ailleurs, $P_{n-1}(x+1) = \dfrac{1}{(n-1)!}(x+1)[(x+1)+(n-1)]^{n-2} = \dfrac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2}$.

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).}$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse $\mathcal{K}_n$: « $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$ ».

⋆ $P_0 = 1 \implies \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_0(x+y) = P_0(x)P_0(y)$: $\mathcal{K}_0$ est vérifiée.

⋆ Supposons $\mathcal{K}_n$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons $P_{n+1}(x+y)$ en utilisant le théorème fondamental de l'analyse appliqué à la fonction $y \mapsto P_{n+1}(x+y)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x+y) &= P_{n+1}(x+0) + \int_0^y P_{n+1}'(x+t)dt \\
&\underset{2.}{=} P_{n+1}(x) + \int_0^y P_n(x+t+1)dt \\
&\underset{\mathcal{K}_n}{=} P_{n+1}(x) + \int_0^y \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(t+1)dt \\
&\underset{2.}{=} P_{n+1}(x) + \int_0^y \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k+1}'(t)dt \quad (\text{car } n-k+1>0) \\
&= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \int_0^y P_k(x)P_{n-k+1}'(t)dt \quad (\text{somme finie}) \\
&= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \int_0^y P_{n-k+1}'(t)dt \\
&= P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x)[P_{n-k+1}(y) - P_{n-k+1}(0)] \\
&\underset{1.(b)}{=} P_{n+1}(x)P_0(y) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k+1}(y) \quad (\text{car } P_0 = 1 \text{ et } n-k+1>0) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)P_{n+1-k}(y)
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_{n+1}$ est bien vérifiée.

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y).}$

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

1.(a) Quand n tend vers $+\infty$ on peut écrire $\left(\dfrac{x+n}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$ pour $n > -x$.

Pour $x \neq 0$: $(n-1)\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)\dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$.

Par continuité de la fonction exp on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x+n}{n}\right)^{n-1} = e^x$. C'est vrai aussi pour $x = 0$.

On a bien démontré que $\boxed{(x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}}$.

1.(b) La formule de Stirling s'écrit : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$.

Pour $ax \neq 0$ on a $|P_n(x)a^n| = \dfrac{|x||x+n|^{n-1}|a|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|e^x n^{n-1}|a|^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{|ea|^n}{n^{3/2}}$.

Si $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$ on a $\dfrac{|ea|^n}{n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$ terme général d'une série convergente puisque $\dfrac{3}{2} > 1$.

Si $|a| > \dfrac{1}{e}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|ea|^n}{n^{3/2}} = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

La série de terme général $P_n(x)a^n$ converge donc absolument si et seulement si $\boxed{|a| \leqslant \dfrac{1}{e}}$.

2.(a) Soit $a \in \left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$. Pour montrer la continuité de la fonction définie par $F_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n$ nous allons appliquer le théorème de continuité à la série de fonctions de terme général $u_n(x) = P_n(x)a^n$.

Théorème : si pour tout n la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et si la série de fonctions $(\sum u_n)$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$ alors la fonction $F_a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction u_n est bien continue sur $\mathbb{R}$ puisque P_n est un polynôme.

Pour $x \in [-A, A]$ avec $A > 0$ et $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$ on a $|P_n(x)a^n| \leqslant \dfrac{|x||x+n|^{n-1}}{n!}\dfrac{1}{e^n} \leqslant \dfrac{A(A+n)^{n-1}}{n!}\dfrac{1}{e^n} = w_n$.

$w_n \sim \dfrac{Ae^A}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série convergente donc la série de fonctions $(\sum u_n(x))$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$. On en déduit que $\boxed{F_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

2.(b) Théorème du produit de Cauchy pour deux séries absolument convergentes de termes généraux a_n et b_n :

la série de terme général $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est absolument convergente et de plus $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

2.(c) Posons $a_n = P_n(x)a^n$ et $b_n = P_n(y)a^n$. Pour $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$ les séries $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ sont absolument convergentes. Par suite la série produit de Cauchy $(\sum c_n)$ est aussi absolument convergente avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x)a^k P_{n-k}(y)a^{n-k} = P_n(x+y)a^n$ en utilisant le résultat de la question III 3.

On en déduit que $F_a(x)F_a(y) = F_a(x+y)$ et comme de plus F_a est continue, elle est bien solution de (R).

On calcule $F_a(0) = 1$ puisque $P_n(0) = 0$ pour $n \geqslant 1$ (III 1.(b)) et $P_0 = 1$.

On peut donc appliquer le résultat du II 3.(f) et obtenir $\boxed{F_a(x) = (F_a(1))^x}$.

2.(d) Pour montrer que la fonction F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ quand $|a| \leqslant e^{-1}$ nous allons appliquer le théorème de dérivation à la série de fonctions de terme général $u_n(x) = P_n(x)a^n$.

Théorème : si pour tout n la fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, si la série de fonctions $(\sum u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et si la série de fonctions $(\sum u_n')$ converge normalement sur tout segment alors la fonction $F_a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F_a' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

La fonction u_n est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque P_n est un polynôme.

Nous avons déjà démontré que la série de fonctions $(\sum u_n)$ de variable x converge normalement sur tout

segment $[-A, A]$ quand $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$ donc elle converge simplement sur $\mathbb{R}$.
D'après la question III 2. on a, pour $n \geqslant 1$, $u_n'(x) = P_n'(x)a^n = P_{n-1}(x+1)a^n = au_{n-1}(x+1)$. Nous avons montré que $(\sum u_n)$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$ donc $(\sum u_n')$ converge normalement sur tout segment $[-A-1, A-1]$. On en déduit que $\boxed{F_a \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ quand $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$ avec $F_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n'(x)a^n = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x+1)a^n = a \sum_{n'=0}^{+\infty} P_{n'}(x+1)a^{n'}$ en posant $n = n'+1$.
Donc $\boxed{F_a'(x) = aF_a(x+1)}$.

2.(e) Avec le IV 2.(c) on a $F_a(x) = \exp(x\ln(F_a(1)))$ d'où $F_a'(x) = \ln(F_a(1))\exp(x\ln(F_a(1)))$ et $F_a'(0) = \ln(F_a(1))$.
Avec le IV 2.(d) on a $F_a'(x) = aF_a(x+1)$ d'où $F_a'(0) = aF_a(1)$.
On en déduit que $\ln(F_a(1)) = aF_a(1)$ donc $\boxed{F_a(1) \text{ est solution de } (E_a)}$.

3.(a) $G(a) = F_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n$ est la somme d'une série entière de variable a. D'après le IV 1.(b) il y a convergence absolue si et seulement si $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$, donc le rayon de convergence est égal à $\dfrac{1}{e}$.
Comme il y a convergence normale sur $\left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$ la fonction G est continue sur $\left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$. D'après les propriétés des séries entières elle est de classe C^∞ sur $\left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$, donc de classe C^1.
Comme $P_n(1) = \dfrac{(n+1)^{n-1}}{n!} > 0$ on a $G'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(1)na^{n-1} > 0$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$.
Donc $\boxed{G \text{ est strictement croissante sur } \left[0, \dfrac{1}{e}\right]}$.

3.(b) Puisque G est strictement croissante et continue sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$, $G\left(\left[0, \dfrac{1}{e}\right]\right) = \left[G(0), G\left(\dfrac{1}{e}\right)\right] = [F_0(1), F_{1/e}(1)]$.
On a donc $\boxed{G\left(\left[0, \dfrac{1}{e}\right]\right) = [1, e]}$ puisque l'équation $(E_{1/e})$ a une unique solution égale à e (I 1.(c))

3.(c) Si $a \in \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$ l'équation (E_a) a une unique solution α_a donc on a bien $F_a(1) = \alpha_a$.
Si $a \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ l'équation (E_a) a deux solutions : $\alpha_a \in]1, e[$ et $\beta > e$. Comme $F_a(1) = G(a) \in [1, e]$ on a bien $F_a(1) = \alpha_a$.
Si $a = \dfrac{1}{e}$ l'équation (E_a) a une unique solution $\alpha_a = e$ donc on a bien $F_a(1) = \alpha_a$.
Dans tous les cas on a bien $\boxed{F_a(1) = \alpha_a}$.

4. Pour $y > 0$ et $1 \leqslant C \leqslant e^{1/e}$ on a $y^y = C \Leftrightarrow y\ln(y) = \ln(C) \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{y} = (-\ln(C))\dfrac{1}{y}$.
C'est donc équivalent à $\dfrac{1}{y}$ solution de $(E_{-\ln(C)})$. Comme $-\ln(C) \in \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$ l'équation $y^y = C$ a une unique solution y_0 telle que $\dfrac{1}{y_0} = F_{-\ln(C)}(1)$.
Avec la propriété $F_a(1)F_a(-1) = F_a(0) = 1$ on déduit :

$$\boxed{y_0 = F_{-\ln(C)}(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-1)(-\ln(C))^n = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}(\ln(C))^n}.$$