CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

L'épreuve est constituée d'un problème dont les trois parties sont relativement indépendantes.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

I. 1) a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-ts}\, ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

I. 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt.$

I. 3) a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. Justifier l'égalité :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}\, dt.$$

c) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma.$$

I. 4) a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\, dt.$

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\, dt$

et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n}.$

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

I. 5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt.$

I. 6) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0.$

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\, dx = 1.$$

Partie II

II. 1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

b) Justifier que $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

II. 2) On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$.

À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

b) Étudier si M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

II. 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer des réels $b_0(x), \ldots, b_n(x)$ tels que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$. *Indication: On pourra citer et utiliser une formule de Taylor.*

b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II. 4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. Déterminer $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\quad y' - y + g = 0$.

Justifier que la solution générale est de la forme : $y : x \mapsto ke^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt,\ k \in \mathbb{R}$.

II. 5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et soit $N_\infty(g) = \sup\{|g(t)|, t \in \mathbb{R}\}$.

a) On définit $T_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t+x)\, dt$.

Justifier qu'alors $T_g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\, du$, et que T_g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et g.

b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Montrer qu'en général T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

d) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.

Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, alors $|T_g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

II. 6) a) Pour tout réel A, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t}\, dt$.

b) Soit $c : t \mapsto \cos(t)$, $s : t \mapsto \sin(t)$ et F le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (c, s).

Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s). N est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $xy''+y'-(x+1)y=1.$

III. 1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x\in]-r,r[$ où $r>0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite (a_n), montrer qu'il existe $K>0$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad |a_n|\leqslant\frac{K}{n!}.$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r=+\infty$.

III. 2) On souhaite résoudre ici cette équation difffentielle sur l'intervalle $I=\mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$\mathcal{S}=\{y\in C^2(I,\mathbb{R})/\quad\forall x>0,\quad xy''(x)+y'(x)-(x+1)y(x)=1\quad\}.$$

a) Pour tout $y\in C^2(I,\mathbb{R})$, on pose $z(x)=e^{-x}y(x)$ pour tout $x>0$.

Montrer que $y\in\mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x>0,\quad xz''(x)+(2x+1)z'(x)=e^{-x}\qquad(\star).$$

b) Déterminer les $Z\in C^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0,\quad xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=0.$$

c) Déterminer les $Z\in C^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0,\quad xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=e^{-x}.$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z\in C^2(I,\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(\star)$ de **III.2.a)**, en utilisant la fonction R définie pour $x>0$ par $R(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$: *On utilisera $R(x)$ et $R(2x)$.*

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y\in\mathcal{S}$.

III. 3) a) Sachant que $R(x)=-\ln(x)+\gamma+o(1)$ quand $x\to0$ avec $x>0$, déterminer les solutions $y\in\mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par : $S(x)=R(x)+\ln(x)+\gamma$ pour $x>0$ (vu en **I. 3) c)**).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **III. 1)**: on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites (a_n) de **III.1)** ?

•• FIN ••