Corrigé de E3A 2017 PC math 2

Partie I.

1) a) Pour $t = 0$: $f(0) = 1$. Pour $t \neq 0$: $f(t) = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-ts}}{-t}\right]_{s=0}^{s=1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

b) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. Le développement limité en 0 de $\mathrm{e}^{-t} = 1 - t + o(t)$ entraine que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $s \in]0,1]$, on a $t < u \Rightarrow e^{-su} < e^{-st} \Rightarrow f(u) < f(t)$. Enfin, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{-t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

c) $\mathrm{e}^{-t} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-t)^n}{n!}$ avec un rayon de convergence infini donc $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n!}$ pour $t \neq 0$, égalité qui s'étend à $t = 0$ puisque $f(0) = 1$. Le rayon de convergence est infini.

2) a) Puisque le rayon de convergence est infini on peut intégrer terme à terme ce développement en série entière sur $[0,x]$ pour tout x réel et obtenir: $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n!)}$

b) Pour $x = 1$ on obtient $S(1) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n!)} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

3) a) $R(x)$ est défini pour tout $x > 0$ puisque $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et que, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = o(\mathrm{e}^{-t})$ qui est intégrable sur $[x,+\infty[$.

b) En intégrant par parties: $-\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[\ln(t)(\mathrm{e}^{-t}-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = S(1)$. Cette intégration par parties est légitime puisque l'intégrale $S(1)$ existe, que $\ln(1) = 0$ et qu'en 0 on a $\ln(t)(\mathrm{e}^{-t}-1) \sim -t\ln(t)$ qui a pour limite 0.

En intégrant par parties: $-\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -R(1)$. Cette intégration par parties est légitime puisque l'intégrale $R(1)$ existe, que $\ln(1) = 0$ et que $\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

On a bien obtenu $\gamma = S(1) - R(1) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

c) Par la relation de Chasles: $R(x) = R(1) - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $R'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

De $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ on déduit $S'(x) = f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$.

On en déduit $S'(x) = R'(x) + \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$. Les fonctions S et $x \mapsto R(x) + \ln(x) + \gamma$ ont des dérivées égales sur l'intervalle $]0,+\infty]$. Comme elles prennent la même valeur pour $x = 1$ ($S(1) = R(1) + \gamma$) elles sont égales sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4) a) La série entière de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ a un rayon de convergence égal à 1 (le terme général tend vers 0 pour $0 < x < 1$ et tend vers l'infini pour $x > 1$) donc la série converge pour $x \in]0,1[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $0 \leqslant \dfrac{x^t}{t} \leqslant \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $\ln(x) < 0$. $g(x)$ est donc bien défini pour $x \in]0,1[$.

$g_n(x) - g(x) = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto x^t = \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ sont décroissantes et positives sur $]1,+\infty[$ ($\ln(x) < 0$) donc $t \mapsto \dfrac{x^t}{t}$ l'est aussi. On peut donc écrire $\dfrac{x^{k+1}}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^k}{k}$ d'où en ajoutant, $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x^k}{k} \leqslant \int_n^N \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$ puis en faisant tendre N vers l'infini: $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$.

On en déduit $0 \leqslant g_n(x) - g(x) = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{n}$.

b) On en déduit pour tout $x \in]0,1[$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $N_\infty(g_n - g) \leqslant \dfrac{1}{n}$ qui a pour limite 0 donc la suite g_n converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En utilisant le développement en série entière $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ valable pour $|x| < 1$ on obtient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]0,1[$.

D'autre part $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{t\ln(x)}}{t}\mathrm{d}t = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = R(-\ln(x))$ car $t \mapsto u = -t\ln(x)$ est une bijection de classe C^1 de $[1,+\infty[$ sur $[-\ln(x),+\infty[$ quand $x \in]0,1[$.
On en déduit pour $x \in]0,1[$: $g(x) = -\ln(1-x) - R(-\ln(x)) = -\ln(1-x) - S(-\ln(x)) + \ln(-\ln(x)) + \gamma$ en utilisant le I.3) c).
Par suite $g(x) = \ln\left(\dfrac{-\ln(x)}{1-x}\right) - S(-\ln(x)) + \gamma$.
De $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ et de la continuité de S en 0 on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x) = \ln(1) - S(0) + \gamma = \gamma$. En admettant $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \gamma$ on obtient avec $g_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$.

5) $R(ax) = \displaystyle\int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au}}{u}\mathrm{d}u$ puisque $u \mapsto au$ est une bijection de classe C^1 de $[x,+\infty[$ sur $[ax,+\infty[$ (pour $x > 0$ et $a > 0$). De même $R(bx) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au}}{u}\mathrm{d}u$. On obtient donc $R(ax) - R(bx) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au} - \mathrm{e}^{-bu}}{u}\mathrm{d}u$. D'autre part en utilisant le I.3) c):
$R(ax) - R(bx) = S(ax) - S(bx) - \ln(ax) + \ln(bx) = S(ax) - S(bx) + \ln(b) - \ln(a)$.
Par continuité de S en 0 on déduit en faisant tendre x vers 0: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au} - \mathrm{e}^{-bu}}{u}\mathrm{d}u = \ln(b) - \ln(a)$.

6) a) Pour $x > 0$ on a: $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}[-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.
Par suite $0 \leqslant xR(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Avec le I.3) c): $R(x) = -\ln(x) + S(x) - \gamma$ qui donne $R(x) \sim -\ln(x)$ quand x tend vers 0. On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 0} xR(x) = \lim_{x\to 0} -x\ln(x) = 0$.
On peut donc intégrer par parties: $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = [xR(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xR'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ puisque $xR'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (montré au I.3)c)). On obtient ensuite $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

Partie II

1) a) I_n existe puisque $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est continue et $t^n\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

b) On intègre par parties: $I_{n+1} = [-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (n+1)t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)I_n$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.
On montre par récurrence sur n que $I_n = n!$. C'est vérifié pour $n = 0$ puisque $I_0 = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
Supposons $I_n = n!$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$; on en déduit $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.
La proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Puisque $P(x+t)$ est une combinaison linéaire des t^k on déduit que $T(P)(x)$ est bien défini comme combinaison linéaire des I_k.
T est une application linéaire puisque $T(\lambda P+Q)(x) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$ par linéarité de l'intégrale.

On calcule $T(1)(x) = I_0 = 1$, $T(X)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x+t)\mathrm{d}t = xI_0 + I_1 = 1 + x$ donc $T(X) = 1 + X$.

$T(X^2)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x+t)^2\mathrm{d}t = x^2I_0 + 2xI_1 + I_2 = 2 + 2x + x^2$ donc $T(X^2) = 2 + 2X + X^2$.

T est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre 3). Si elle était diagonalisable elle serait semblable à la matrice diagonale ayant des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire la matrice identité et on aurait alors $M = I_3$ ce qui est faux: M n'est donc pas diagonalisable.

3) a) Appliquons la formule de Taylor pour les polynômes. Pour un polynôme de degré au plus n on a: $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}t^k$ donc $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$ en posant $b_k(x) = \dfrac{P^{(k)}(x)}{k!}$.

b) T est une application linéaire puisque $T(\lambda P+Q)(x) = \lambda T(P)(x)+T(Q)(x)$ par linéarité de l'intégrale. $P(x+t)$ étant combinaison linéaire des t^k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ on obtient que $T(P)(x)$ est combinaison linéaire des I_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$T(P)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k b_k(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$ puisque $I_k = k!$.

On obtient donc $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$ qui appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$. On a $a_k = 1$ pour $k \in [[0, n]]$.

c) Le calcul de $T(X^k) = X^k + kX^{k-1} + ... + k!$ donne la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & ... & n! \\ 0 & 1 & 2 & ... & n! \\ 0 & 0 & 1 & ... & n!/2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre $n+1$). Le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des polynômes P qui vérifient $T(P) = P$, c'est-à-dire $P'+P''+...+P^{(n)} = 0$. C'est équivalent à $P' = 0$ puisque si P' n'était pas nul, $P' + P'' + ... + P^{(n)}$ aurait le degré de P'.

Le sous-espace propre associé à 1 est donc l'ensemble des polynômes constants.

4) En la multipliant par e^{-x} l'équation différentielle devient $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{e}^{-x}y) = -\mathrm{e}^{-x}g(x)$ d'où $\mathrm{e}^{-x}y(x) - y(0) = -\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}g(t)\mathrm{d}t$.

Puisque g est continue et bornée (par M), on a $|g(x)\mathrm{e}^{-x}| \leqslant M\mathrm{e}^{-x}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $\mathrm{e}^{-x}y(x) - y(0) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}g(t)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}g(t)\mathrm{d}t$ d'où $y(x) = k\mathrm{e}^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}g(t)\mathrm{d}t$ en posant $k = y(0) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}g(t)\mathrm{d}t$.

5) a) T_g est bien définie puisque g est continue et bornée donc $|g(x+t)\mathrm{e}^{-t}| \leqslant M\mathrm{e}^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le changement de variable défini par $t \mapsto u = t+x$ est une bijection de classe C^1 de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$ donc on peut écrire $T_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}g(x+t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u+x}g(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}g(u)\mathrm{d}u$.

Puisque $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}g(u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}g(u)\mathrm{d}u - \int_0^x \mathrm{e}^{-u}g(u)\mathrm{d}u$ on obtient par dérivation:

$T_g'(x) = T_g(x) + \mathrm{e}^x(-\mathrm{e}^{-x}g(x))$ d'où $(T_g)' = T_g - g$.

b) D'après ce qui précède, $T_g = \lambda g$ entraine $\lambda g' = (\lambda - 1)g$. Si $\lambda = 0$ on obtient $g = 0$ qui est exclu par l'énoncé. Si $\lambda \neq 0$, on obtient $g(x) = k\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. Comme g doit être bornée sur $\mathbb{R}$, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $g = k$ constante. Réciproquement si $g = k$ constante on obtient bien $T_g(x) = k$ donc $T_g = g$.

Si g est constante non nulle, seul $\lambda = 1$ convient. Sinon il n'existe pas de λ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Puisque g est bornée on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|g(x)| \leqslant N_\infty(g)$. On en déduit:

$|T_g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}N_\infty(g)\mathrm{d}t = N_\infty(g)$. On a donc $N_\infty(T_g) \leqslant N_\infty(g)$.

d) Si g tend vers 0 en $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$. On en déduit pour $x \geqslant A$: $|T_g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \varepsilon\, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \varepsilon$ puisque $|g(x+t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$. On a bien montré que T_g tend vers 0 en $+\infty$.

6) a) L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{(i-1)t}$ est continue et intégrable sur $[A, +\infty[$ puisque $|\mathrm{e}^{(i-1)t}| = \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[A, +\infty[$ pour tout $A \in \mathbb{R}$.

$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)t}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1}\right]_A^{+\infty} = \dfrac{\mathrm{e}^{(i-1)A}}{1-i}$ puisque $|\mathrm{e}^{(i-1)t}| = \mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$.

b) L'application $g \mapsto T_g$ est clairement linéaire.

Pour $g(t) = \mathrm{e}^{it}$ on calcule $T_g(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{iu}\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{1-i}$ avec le calcul du II.6)a).

On a donc $T_g(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))(1+i) = \dfrac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) + \dfrac{i}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.

Par linéarité de T on en déduit:

$T_c(x) = Re(T_g(x)) = \dfrac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$ et $T_s(x) = Im(T_g(x)) = \dfrac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.

On a donc $T_c = \dfrac{1}{2}(c - s)$ et $T_s = \dfrac{1}{2}(c + s)$. L'application $t \mapsto T_g$ est bien un endomorphisme de F et sa matrice dans la base (c, s) est $N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

N n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ puisque son polynôme caractéristique égal à $\chi_N(x) = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)\left(\dfrac{1}{2} - x\right) + \dfrac{1}{4} = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ n'a pas de racine réelle ($\Delta = 1 - 2 = -1 < 0$).

Partie III

1) a) Pour $x \in]-r, r[$ on peut dériver terme à terme et obtenir:

$\theta'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ et $\theta''(x) = \sum_{n\geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

En reportant dans l'équation différentielle on obtient:

$\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = 1$ ou encore $\sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = 1$. Posons $n = n' + 2$ dans la première somme et $n = n' + 1$ dans la deuxième:

$\sum_{n'\geqslant -2} (n'+2)^2 a_{n'+2} x^{n'+1} - \sum_{n'\geqslant -1} a_{n'+1} x^{n'+1} - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = 1$ d'où en regroupant:

$a_1 - a_0 + \sum_{n\geqslant 0} ((n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) x^{n+1} = 1$.

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on en déduit: $a_1 - a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$: $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

b) Soit $K = \max(|a_0|, |a_1|)$. Montrons par récurrence double sur n que pour tout n on a $n!|a_n| \leqslant K$. C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$. On en déduit: $(n+2)!|a_{n+2}| = \dfrac{(n+1)!}{n+2}|a_{n+1} + a_n| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{n+2}(|a_{n+1}| + |a_n|) \leqslant \dfrac{1}{n+2}(K + (n+1)K) = K$ en utilisant l'hypothèse de récurrence pour n et $n+1$. On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 0$: $|a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}$.

Soit une série entière associée à une suite (a_n) vérifiant $a_1 - a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$: $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Puisque pour tout $n \geqslant 0$ elle vérifie $|a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}$ on en déduit que le rayon de convergence est infini, donc la somme de la série vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

2) a) De $z(x) = \mathrm{e}^{-x}y(x)$ on déduit $z'(x) = -\mathrm{e}^{-x}y(x) + \mathrm{e}^{-x}y'(x)$ et $z''(x) = \mathrm{e}^{-x}y(x) - 2\mathrm{e}^{-x}y'(x) + \mathrm{e}^{-x}y''(x)$. On en déduit $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x}(xy(x) - 2xy'(x) + xy''(x)) + (2x+1)(-y(x) + y'(x)) = \mathrm{e}^{-x}(xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x))$.

Par suite y est dans S si et seulement si $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

b) Pour $x>0$ l'équation s'écrit $Z'(x)+\dfrac{2x+1}{x}Z(x)=0$. Une primitive de $\dfrac{2x+1}{x}$ est $2x+\ln(x)$. En multipliant l'équation par $\mathrm{e}^{2x+\ln(x)}=x\mathrm{e}^{2x}$ elle se réécrit: $(x\mathrm{e}^{2x}Z(x))'=x\mathrm{e}^{2x}Z'(x)+(2x+1)\mathrm{e}^{2x}Z(x)=0$ d'où les solutions $Z(x)=\dfrac{\lambda}{x}\mathrm{e}^{-2x}$.

c) Le même calcul qu'au b) donne ici $(x\mathrm{e}^{2x}Z(x))'=\mathrm{e}^{x}$ qui s'intègre en $(x\mathrm{e}^{2x}Z(x))=\mathrm{e}^{x}+\lambda$ d'où $Z(x)=\dfrac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x}+\lambda\mathrm{e}^{-2x})$.

On peut aussi utiliser le III.2)b) et appliquer la méthode de variation de la constante.

d) Il suffit d'intégrer Z pour obtenir $z(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\lambda\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t+C$. En introduisant $R(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t=-\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ et de même $R(2x)=\displaystyle\int_{2x}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\mathrm{d}u=-\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t$ on obtient $z(x)=-R(x)-\lambda R(2x)+\mu$ où λ et μ sont des réels quelconques.

e) La solution générale $y\in S$ s'en déduit: $y(x)=\mathrm{e}^{x}z(x)=-\mathrm{e}^{x}R(x)-\lambda\mathrm{e}^{x}R(2x)+\mu\mathrm{e}^{x}$ où λ et μ sont des réels quelconques.

3) a) En reportant $R(x)=-\ln(x)-\gamma+o(1)$ et de même pour $R(2x)$ dans le III.2)e) on obtient:
$y(x)=\mathrm{e}^{x}(\ln(x)+\gamma+\lambda(\ln(2x)+\gamma)+\mu+o(1))=\mathrm{e}^{x}(\ln(x)(1+\lambda)+\gamma+\lambda(\ln(2)+\gamma)+\mu+o(1))$.
Cette expression n'a une limite finie en 0 que pour $\lambda=-1$ puisque $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.
On a alors avec $R(x)=S(x)-\ln(x)-\gamma$:
$y(x)=\mathrm{e}^{x}(R(2x)-R(x)+\mu)=\mathrm{e}^{x}(S(2x)-S(x)+\mu')$ pour $x>0$ en posant $\mu'=-\ln(2)+\mu$.

b) En posant comme au III.2)a) $z(x)=\mathrm{e}^{-x}y(x)=S(2x)-S(x)+\mu'$ on calcule pour $x\neq 0$:

$$z'(x)=2S'(2x)-S'(x)=2\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2x}-\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}$$

$$z''(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x^2}+\frac{-\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-2x}}{x}$$

D'où $xz''(x)+(2x+1)z'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}+-\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-2x}+2(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}=\mathrm{e}^{-x}$.

C'est vrai aussi pour $x=0$ donc z vérifie l'équation (*) pour tout $x\in\mathbb{R}$ et par suite $y(x)=\mathrm{e}^{x}(S(2x)-S(x)+\mu')$ vérifie l'équation $xy''+y'-(x+1)y=1$. Comme S est développable en série entière on en déduit par application du produit de Cauchy que y est développable en série entière avec un rayon de convergence infini. Au III.1) on a trouvé que l'équation $xy''+y'-(x+1)y=1$ possède une unique solution possédant un développement en série entière si on impose la condition initiale $y(0)=a_0$. On peut donc écrire $\theta(x)=\mathrm{e}^{x}(S(2x)-S(x)+a_0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
L'application du produit de Cauchy permet d'en déduire une expression de a_n.

Complément: calculons une expression de a_n. On peut se limiter au cas où $a_0=0$.
De $\theta(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$, $S(2x)-S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}(2^n-1)x^n}{n(n!)}$ et $\mathrm{e}^{x}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ on déduit:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2^k-1)}{k(k!)}\frac{1}{(n-k)!}\text{ d'où } n!a_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(2^k-1)}{k}.$$

On peut simplifier en écrivant: $n!a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_1^2(-t)^{k-1}\binom{n}{k}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{(1-t)^n-1}{(1-t)-1}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_1^2(1-t)^{k-1}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{(1-t)^k}{k}\right]_1^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On obtient finalement $a_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On peut aussi retrouver cette expression en utilisant la relation $(n+2)^2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ et $a_1=1$. On pose $b_n=n!a_n$ qui donne $(n+2)b_{n+2}-b_{n+1}-(n+1)b_n=0$ ou encore $(n+2)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(n+1)(b_{n+1}-b_n)$ qui avec $b_1=1$ et $b_0=0$ donne $n(b_n-b_{n-1})=(-1)^{n-1}$ d'où $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.