Corrigé de E3A 2016 PC math 2

Partie I.

1. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ a un rayon de convergence égal à 1.

2. En posant $x = -\frac{1}{2}$ on obtient: $\ln(2) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

3. (a) $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ tend vers 0 pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et vers $+\infty$ pour $x > 1$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

En décomposant en éléments simples $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ on a $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

En changeant x en $-x$ dans le 1) on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ d'où:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

(b) Pour $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)$.

4. (a) La série converge par le théorème des séries alternées puisque $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est le terme général d'une série alternée, que $\lim(u_k) = 0$ et que $|u_k| = \frac{1}{k}$ est une suite décroissante.

(b) Pour $x \in [0,1]$, $u_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est le terme général d'une série alternée; de plus, $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = 0$ et $|u_k(x)| = \frac{x^k}{k}$ est une suite décroissante. On peut à nouveau appliquer le théorème des séries alternées qui donne de plus que la valeur absolue du reste est majorée par le premier terme négligé. On a donc: $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$.

(c) La série de fonction $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ et chaque fonction est continue. La somme de la série est donc continue sur $[0,1]$ et par suite l'égalité $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ s'étend à $x = 1$ d'où $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II

1. (a) En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ on obtient: $a_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} \times \frac{2 \times 4 \times ... \times (2n)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

(b) La formule de Stirling s'écrit: $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

(c) En appliquant la formule de Stirling à $n!$ et $(2n)!$ on obtient:
$a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n2^{2n+1}n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}2\pi n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

2. (a) On intègre par parties:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{2n} x \mathrm{d}x = \left[\cos x \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin x) \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \mathrm{d}x = \frac{I_{n+1}}{2n+1}.$$

(b) On déduit du (a) que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

Montrons par récurrence que $I_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} \dfrac{\pi}{2}$. C'est vrai pour $n = 1$ puisque, avec le (a), $I_1 = \dfrac{1}{2} I_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}$. Supposons la propriété vraie pour n.

On en déduit $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n = \dfrac{2n+1}{2n+2} \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \dfrac{\pi}{2}$. La propriété est donc vraie pour $n+1$. On en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par suite $I_n = \pi n a_n$.

3. (a) En posant $t = -\sin^2 x$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$ on obtient pour $x \in [0, \pi/2[$: $\ln(1 - \sin^2 x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^{2n} x}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série de fonctions $(\sum f_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc simplement sur $[0, \pi/2[$ vers la fonction f définie par $f(x) = -\ln(1 - \sin^2 x)$.

(b) Appliquons le théorème d'intégration sur un intervalle de la somme d'une série de fonctions.

* Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $I = [0, \pi/2[$ (elle est continue sur le segment $[0, \pi/2]$).
* La série de fonctions $(\sum f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur I vers la fonction f qui est continue sur $[0, \pi/2[$.
* La série de terme général $\int_0^{\pi/2} |f_n(x)| \mathrm{d}x$ converge: en effet, $\int_0^{\pi/2} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^{2n} x}{n} \mathrm{d}x = \dfrac{I_n}{n} = \pi a_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ avec l'équivalent de a_n obtenu au II.1.(c). C'est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $\dfrac{3}{2} > 1$.

On en déduit que f est intégrable sur $[0, \pi/2]$ et que $\int_0^{\pi/2} f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi a_n$ d'où enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\ln(1 - \sin^2 x) \mathrm{d}x = -\dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \mathrm{d}x$ puisque $\cos x > 0$ sur $[0, \pi/2[$.

4. (a) Dans I posons $t = \dfrac{\pi}{2} - x$. C'est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$. Puisque l'intégrale I existe on obtient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \mathrm{d}t = J$. On en déduit que J existe et qu'elle est égale à I.

(b) $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x \sin x) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\dfrac{\sin(2x)}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(2x)\right) \mathrm{d}x - \dfrac{\pi}{2} \ln(2)$.

En posant $x = \dfrac{t}{2}$ (bijection strictement croissante de classe C^1) on obtient $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(2x)\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(J + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t)) \mathrm{d}t)$.

En posant $t = \pi - u$ (bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[\pi/2, \pi[$ sur $]0, \pi/2]$) on obtient $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t)) \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - u))(-\mathrm{d}u) = J$. On a donc obtenu: $I + J = \dfrac{1}{2}(J + J) - \dfrac{\pi}{2} \ln(2)$

d'où $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

5. On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \left(-\frac{2}{\pi}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}\ln(2)\right) = \ln(2)$.

Partie III

1. (a) U_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $U_n = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n}$.

Avec la définition de U_n on obtient: $\dfrac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}(U_{k-1}-U_k) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_k}{k}$.

Posons $k = k'+1$ dans la première somme: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k'=n}^{N-1} \frac{U_{k'}}{k'+1} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_k}{k} = \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1} U_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{U_N}{N} = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{U_k}{k(k+1)} - \frac{1}{N2^N}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient: $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

(c) En minorant $k+1$ par $n+1$ on obtient: $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} = \frac{1}{n+1}R_n$ puisque $U_k = \dfrac{1}{2^k}$. Comme $\dfrac{1}{n+1}$ a pour limite 0 on obtient $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \mathrm{o}(R_n)$.

(d) On déduit du (b) et du (c) que $\dfrac{U_n}{n+1} = R_n + \mathrm{o}(R_n)$ d'où $\dfrac{U_n}{n+1} \sim R_n$, d'où $R_n \sim \dfrac{U_n}{n} \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) La somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-t \neq 1$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}$.

(b) En intégrant sur $[0,1]$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k+1} = [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$. Avec le résultat de la question I.4.(c) on déduit $\ln(2) - S_n = \ln(2) - (-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$ d'où $S_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

(c) En intégrant par parties on obtient:

$$S_n = (-1)^n\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+t}\right]_0^1 - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t.$$

(d) De $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}$ on déduit que $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ et donc $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)} \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) L'équivalent obtenu pour a_n à la question II.1.(c) entraine que $\lim(2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k) = 1$. On en déduit par définition de la limite d'une suite que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$ on ait $1-\varepsilon \leqslant 2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k \leqslant 1+\varepsilon$ ce qui donne le résultat demandé.

(b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est continue et décroissante pour $t \geqslant 1$. On a donc pour $k \geqslant 1$:

$\dfrac{1}{(k+1)^{3/2}} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^{3/2}}$ d'où, pour $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.

(c) Avec le (a) et le (b) on obtient pour $k \geqslant N$: $\dfrac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \leqslant a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.

En ajoutant pour k de $n+1$ à m on déduit $\dfrac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{m} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.

Comme $\dfrac{3}{2} > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ existe donc on peut faire tendre m vers $+\infty$.

On obtient $\dfrac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \leqslant T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.

(d) Avec $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t = [-2t^{-1/2}]_n^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{n}}$ on déduit $\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant T_n \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{n\pi}}$ d'où $(1-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leqslant T_n\sqrt{\pi n} \leqslant (1+\varepsilon)$. Comme $\dfrac{n}{n+1}$ a pour limite 1 on déduit qu'il existe $N_1 > N$ tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $(1-2\varepsilon) \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leqslant T_n\sqrt{\pi n} \leqslant (1+\varepsilon)$.

Cela démontre que $T_n\sqrt{\pi n}$ a pour limite 1 et par suite $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. On reprend la démarche utilisée dans la question III.1:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}(U_{k-1}-U_k) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_{k-1}}{k(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_k}{k(k+1)}.$$

Posons $k = k'+1$ dans la première somme: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k'=n}^{N-1} \frac{U_{k'}}{(k'+1)(k'+2)} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{N-1} U_k\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)}\right) - \frac{U_N}{N(N+1)} = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - 2\sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{N(N+1)2^N}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient: $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)}$.

En minorant $k+2$ par $n+2$ on obtient: $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{1}{n+2}V_n$ puisque $U_k = \dfrac{1}{2^k}$. Comme $\dfrac{1}{n+2}$ a pour limite 0 on obtient $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} = \mathrm{o}(V_n)$ d'où $\dfrac{U_n}{(n+1)(n+2)} = V_n + \mathrm{o}(V_n)$, d'où $\dfrac{U_n}{(n+1)(n+2)} \sim V_n$, d'où enfin $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

Remarque: pour répondre à la question suivante on n'avait pas besoin d'un équivalent de V_n, il suffisait de majorer V_n par $\dfrac{1}{n^2 2^n}$. C'est immédiat en minorant $k(k+1)$ par n^2: $V_n \leqslant \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. On a $\dfrac{1}{n^2 2^n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$, $\dfrac{1}{n2^n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ et $\dfrac{1}{2n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$. On en déduit que $V_n = \mathrm{o}(R_n)$, $R_n = \mathrm{o}(S_n)$ et $S_n = \mathrm{o}(T_n)$. La série $\left(\sum \dfrac{1}{k(k+1)2^k}\right)$ converge le plus rapidement (son reste tend vers 0 le plus rapidement) et la série $(\sum a_k)$ converge le moins rapidement (son reste tend vers 0 le plus lentement).