CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Dans chacun des exercices, les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous les exercices, étant donnés deux entiers naturels a, b tels que $a < b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. On note N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $< \, , \, >$ et la norme associée $\| \, \|$.

A. Préliminaires : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$| < u_1, u_2 > | \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$$

   On pourra considérer la fonction f définie par $f(t) = \|u_1 + tu_2\|^2$ pour t dans $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs u_1, u_2 pour que $| < u_1, u_2 > | = \|u_1\| \, \|u_2\|$. Justifier votre réponse.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $< u_i, u_j >$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si p est un entier naturel non nul, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

On dit que la matrice M vérifie la propriété $\mathtt{G}$ s'il existe des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, ..., u_n).$$

B. Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3. On suppose que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$.
4. Réciproquement, on suppose que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$. Justifier que B vérifie la propriété $\mathtt{G}$.
   Indications : En considérant (e_1, e_2) une base orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.
5. Justifier que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$ si et seulement si, pour tout entier p dans N^*, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

C. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Démontrer que $a \geq 1$ et $a \geq b^2$.
   (b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est othonormale.

(c) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

(d) En déduire que $a \geq b^2 + 1$.

(e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

7. On suppose $a \geq b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

   (a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

   (b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété `G`.

   (c) Est-il vrai que, pour tout p dans N^*, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G` ? On argumentera précisément la réponse.

D. Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des fonctions f telles que pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 P(t) dt$ est absolument convergente. On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soit p dans N^*.

8. Démontrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1} dt$ est absolument convergente.

9. On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \rightarrow & < f, g >_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1} dt \end{array}$$

   Démontrer que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

10. Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on note :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

11. Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1} dt$ en fonction de α, p et γ_p.

12. Soit n un entier naturel ≥ 2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par D la matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le (i, j)-ème coefficient $d_{i,j}$, pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, est défini par :

$$d_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

    Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, ..., u_n)$ dans E^n tels que la matrice $D^{\otimes p} = G(u_1, ..., u_n)$. On explicitera E, son produit scalaire ainsi que la famille $(u_1, ..., u_n)$.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A. Soit F la fonction définie en un nombre réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée F'. La fonction F' est-elle continue ? est-elle dérivable ?
3. Etablir le tableau de variations de F et dessiner précisément le graphe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

B. Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

4. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
5. Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré ≤ 2. On pose $P : x \to ax^2 + bx + c$ et $Q : x \to dx^2 + ex + f$. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$H(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } x < 0 \\ Q(x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les nombres réels a, b, c, d, e, f pour que H soit une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire une base de E_0. Quelle est la dimension de E_0 ?
6. Soit Ψ_0 l'application de E_0 dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\Psi_0(H) = (H(0), H'(0), H(1))$.
   (a) Démontrer que Ψ_0 est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de Ψ_0.
   (c) En déduire que Ψ_0 est surjective.

C. Soit α un nombre réel. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $P : x \to ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soient u, v, w des nombres réels tels que $f(\alpha) = u$, $f'(\alpha) = v$. Soit H la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq \alpha \\ P(x), & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

7. Justifier que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\alpha + 1) = w$ si et seulement si (a, b, c) est solution d'un système linéaire qu'on explicitera. *Indication : on pourra exprimer a en fonction de $P(\alpha + 1)$, $P(\alpha), P'(\alpha)$.* Ce système linéaire a-t'il une unique solution ?
8. Ecrire une fonction `prolonge` en python qui prend en entrée des nombres (u, v, w, β) et donne en sortie un triplet (a, b, c) tel que la fonction polynomiale définie par $h : x \to ax^2 + bx + c$ vérifie : $h(\beta - 1) = u, h'(\beta - 1) = v$ et $h(\beta) = w$.

D. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $I_0 =]-\infty, 0], I_1 =]0, 1]$, $I_2 =]1, 2]$, ... , $I_j =]j-1, j]$, ... ,$I_{n-1} =]n-2, n-1]$, $I_n =]n-1, +\infty[$.

Soit E l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que sur chacun des intervalles $I_0, I_1, ..., I_n$ la restriction de H est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

9. Pour j un entier compris entre 0 et n, soit $P_j : x \to a_j x^2 + b_j x + c_j$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soit H la fonction définie par : $H(x) = P_j(x)$, si $x \in I_j$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Démontrer que la fonction H appartient à E si et seulement si le vecteur $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_{n_1}, b_{n_1}, c_{n_1}, a_n, b_n, c_n)$ est solution d'un système linéaire à $2n$ équations qu'on explicitera.

   (b) Résoudre ce système si on suppose de plus que H s'annule en tout point i dans $[\![0, n-1]\!]$. On commencera par exprimer b_i et c_i en fonction de a_i et i pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.

   (c) On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & & H & \to & (H(0), H(1), ..., H(n-1)) \end{array}$$

      i. Justifier que φ est une application linéaire.

      ii. Quel est le noyau de φ ? En préciser la dimension.

      iii. Démontrer que φ est surjective. On pourra faire une démonstration par récurrence sur n.

      iv. Quelle est la dimension de E ? On citera précisément le théorème utilisé.

10. Soient $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{49}$ des nombres réels. Ecrire un programme `interpo` en python qui prend en entrée $\beta_0, ..., \beta_{49}$ et donne en sortie une liste de triplets $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), ..., (a_{50}, b_{50}, c_{50})$ tels que la fonction H définie par : $H(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$, si $x \in I_j$, pour $j \in [\![0, 50]\!]$, est dans E et vérifie de plus $H(i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![0, 49]\!]$.

Exercice 3

A. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $(x \to \dfrac{1}{1-x})$ au voisinage de 0. Quel est son rayon de convergence ?

2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note α et β les valeurs propres de la matrice M.

   (a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

   (b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

i. $A + B = 4$,

ii. $A\alpha + B\beta = 3$,

iii. $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

4. Proposer une fonction en python, `suite`(N), qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous forme de nombres rationnels. Préciser la complexité de votre algorithme en fonction des opérations que vous utilisez (additions, multiplications...).

B. On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par *motif* le résultat de trois lancers successifs.
Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur« face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans N^*, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.

Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Soit n dans N^*. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers » , A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5. Déterminer $P(E_n), P(A_n), P(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

6. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, ..., x_k)$ dans $\{0, 1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement
$E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$?

7. Soit n dans N^*. On note v_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ et w_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 1)$.

(a) Exprimer v_1, v_2, w_1, w_2 en fonction de p et q.

(b) Soit n un entier naturel ≥ 3. En décomposant l'événement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que $v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$.

(c) Soit n un entier naturel ≥ 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1.) On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

(d) Soit n un entier naturel ≥ 3. Démontrer que $w_n = p^n + pv_{n-1}$.

8. Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape » , pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

   (a) Soit n un entier naturel ≥ 2.

      i. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

      ii. En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

      iii. Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
      Indication : On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geq 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.

      iv. Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

   (b) Si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie. En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n).$$

   (c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$. Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
   Indication : On pourra calculer v_2 et v_3.

9. Soit n un entier naturel ≥ 3.

   (a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

   (b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

11. Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?