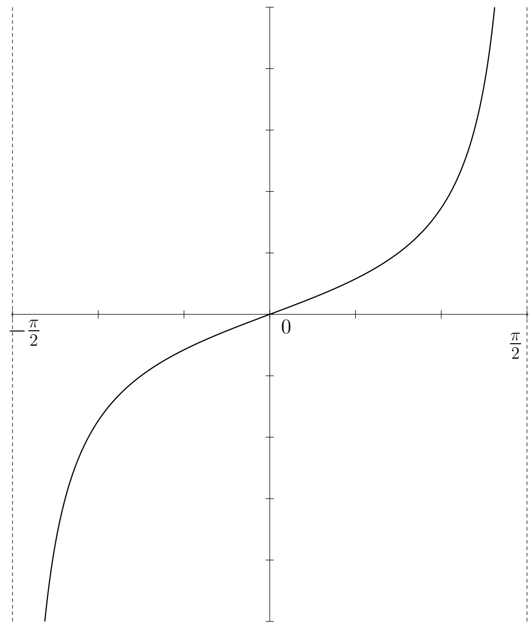
Corrigé de E3A 2015 PC math 2

Partie I A.

1. La fonction tan a pour période π puisque $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

2. La fonction tan est strictement croissante et impaire sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et elle a pour limite $+\infty$ en $\dfrac{\pi}{2}$. La stricte croissance de tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$ montre que π est la plus petite période positive de tan.



3. Démontrons par récurrence sur n l'existence de la suite (T_n).

$\tan^{(0)}(x) = \tan x = T_0(\tan x)$ en posant $T_0(X) = X$.

Supposons pour un entier n l'existence d'un polynôme T_n vérifiant $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$.

En dérivant la fonction composée on obtient: $\tan^{(n+1)}(x) = T_n'(\tan x)(1+\tan^2(x))$.

En posant $T_{n+1} = (1+X^2)T_n'$ on obtient $\tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan x)$ où T_{n+1} est un polynôme.

La propriété est bien démontrée par récurrence.

4. $T_1 = 1+X^2$, $T_2 = (1+X^2)\times 2X = 2X^3+2X$ et $T_3 = (1+X^2)\times(6X^2+2) = 6X^4+8X^2+2$.

5. On démontre par récurrence sur n que T_n est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n=0$ puisque $T_0 = X$ a pour degré 1.

Supposons le vrai pour un entier n. De $T_{n+1} = (1+X^2)T_n'$ on déduit que T_{n+1} est un polynôme à coefficients entiers (T_n' l'étant) et qu'il a pour degré $n+2$ (le degré de T_n' est $n+1-1=n$). On a bien démontré la propriété par récurrence.

6. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral:

si f est de classe C^{N+1} sur $[a,b]$ alors $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t.$

Prenons $f = \tan$, $a = 0$, $b = x$ et $N = 2n+1$. La fonction tan étant impaire, ses dérivées d'ordre pair sont aussi des fonction impaires et donc s'annulent en 0. On obtient bien la formule demandée en posant $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$ et en utilisant $f^{(2n+2)}(t) = T_{2n+2}(\tan t)$.

Partie I B.

7. On effectue une intégration par parties sur $[0, x] \subset I$:
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x).$$

8. (a) Puisque $f^{(n)} \geqslant 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geqslant 0$), la suite $(R_n(b))$ est positive. De plus $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leqslant R_n(b)$. La suite est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

(b) **i.** En effectuant le changement de variable défini par $t = xu$ on obtient:
$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x - xu)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu) x\mathrm{d}u = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu)\mathrm{d}u.$$

ii. On sait déjà que $R_n(x) \geqslant 0$ puisque $x \geqslant 0$. Comme $f^{(n+1)} \geqslant 0$, la fonction $f^{(n)}$ est croissante donc $f^{(n)}(ux) \leqslant f^{(n)}(ub)$ et puisque $1 - u \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ on obtient bien la majoration demandée.

iii. Avec i. et ii. on obtient $R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(tb)\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

(c) Appliquons à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$).

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$ et puisque $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $0 < \frac{x}{b} < 1$) on obtient bien $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $]-b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

9. La fonction tan vérifie les conditions demandées pour f: elle est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geqslant 0$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \frac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du I B.8.(c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ on obtient le résultat demandé.

10. D'après la question précédente le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Mais s'il était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la fonction tangente aurait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est faux. Le rayon de convergence est donc égal à $\frac{\pi}{2}$.

Partie II A.

1. $\psi_n(X^i) = \frac{1}{i+1}((X+1)^{i+1} - X^{i+1}) = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i+1} \binom{i+1}{j} X^j$.

2. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ on déduit par linéarité de l'intégrale que $\psi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_n(X^i)$. Comme le degré de $\psi_n(X^i)$ est égal à i, $\psi_n(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

3. ψ_n est linéaire par linéarité de l'intégrale et elle va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. D'après la formule obtenue au II A.1 (en échangeant i et j), la matrice A de ψ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ telle que $a_{i,j} = \dfrac{1}{j+1}\dbinom{j+1}{i}$ pour $i \leqslant j$ et $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (en numérotant les lignes et les colonnes de 0 à n).

5. La matrice A est donc triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ($a_{i,i} = 1$). Elle est donc inversible ($\det(A) = 1$) et ψ_n est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Comme la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux qui sont tous égaux à 1: ψ_n a une seule valeur propre d'ordre $n+1$ qui est égale à 1.

Si ψ_n était diagonalisable, sa matrice serait semblable à la matrice identité, donc serait égale à l'identité; c'est faux puisque $a_{0,1} = \dfrac{1}{2}$. Donc ψ_n n'est pas diagonalisable.

7. (a) Si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i X^{i+1}$ convient.

(b) $\psi_n(P)(x) = [Q(t)]_x^{x+1} = Q(x+1) - Q(x)$.

(c) $\psi_n(P)'(x) = Q'(x+1) - Q'(x) = P(x+1) - P(x) = \psi_n(P')(x)$.

Partie II B.

8. On fait une démonstration par récurrence sur k. $S_0 = 1$ existe et est unique. Supposons l'existence et l'unicité de $S_0, ..., S_k$. La condition (b) est vérifiée si et seulement si $S_{k+1}(x) = (k+1)\displaystyle\int_0^x S_k(t)\mathrm{d}t + C = Q_k(x) + C$. La condition (c) pour S_{k+1} est vérifiée si et seulement si $C = -\displaystyle\int_0^1 Q_k(t)\mathrm{d}t$. On a donc montré l'existence et l'unicité de S_{k+1} et la suite (S_m) est bien définie de manière unique par récurrence.

9. $S_1 = X + C$ avec $C = -\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$ donc $S_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

$S_2' = 2X - 1$ donc $S_2 = X^2 - X + C$ avec $C = -\displaystyle\int_0^1 (t^2 - t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ donc $S_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.

$S_3' = 3X^2 - 3X + \dfrac{1}{2}$ donc $S_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + C$ avec $C = -\displaystyle\int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ donc $S_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$.

10. On le montre par récurrence sur k. C'est vérifié pour $k = 0$. Supposons que S_k soit un polynôme unitaire de degré k. De $S_{k+1}' = (k+1)S_k$ on déduit que le terme dominant de S_{k+1} est X^{k+1}, donc S_{k+1} est bien un polynôme unitaire de degré $k+1$. La propriété est démontrée par récurrence.

11. Pour $k \geqslant 2$, $S_k(1) - S_k(0) = \displaystyle\int_0^1 S_k'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 kS_{k-1}\mathrm{d}t = 0$ puisque (c) s'applique à $k - 1 \geqslant 1$.

12. Considérons la suite (T_m) définie par $T_m(x) = (-1)^m S_m(1-x)$. Elle vérifie les conditions du II B.8: $T_0 = 1$, $T_{k+1}'(x) = (-1)^k S_{k+1}'(1-x) = (-1)^k (k+1) S_k(1-x) = (k+1)T_k(x)$ et pour $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 T_k(t)\mathrm{d}t =$

$\displaystyle\int_0^1 (-1)^k S_k(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^k S_k(u)\mathrm{d}u = 0$ en faisant le changement de variable $u = 1-t$.
Par unicité de la suite (S_m), on en déduit $T_m = S_m$ pour tout m.

13. Montrons par récurrence sur k que S_k convient (l'unicité résulte du fait que ψ_n est bijectif). C'est vrai pour $k = 0$ puisque $\psi_n(1)(X) = 1$. Supposons pour un entier k que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$. D'après II A.7(c) et la condition (b) du II B.8: $\psi_n(S_{k+1})'(X) = \psi_n((k+1)S_k)(X) = (k+1)X^k$. On en déduit $\psi_n(S_{k+1})(X) = X^{k+1} + C$ avec $C = \psi_n(S_{k+1})(0) = \displaystyle\int_0^1 S_{k+1}(t)\mathrm{d}t = 0$ avec la condition (b) du II B.8. On a bien démontré la propriété pour $k+1$. Elle est démontrée par récurrence.

14. Avec la question II B.9. on obtient: $\sigma_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma_3 = 0$.

15. Pour $k \geqslant 3$ impair: $S_k(0) = S_k(1)$ d'après la question 11 et $S_k(0) = -S_k(1)$ en posant $x = 1$ dans la question 12. On a donc $\sigma_k = S_k(0) = 0$.

16. Montrons le par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $S_0(x) = 1 = \sigma_0$. Supposons pour un entier $n \geqslant 1$ que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k}$. En intégrant $S'_{n+1} = (n+1)S_n$:

$S_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k+1} + C$ avec $C = S_{n+1}(0) = \sigma_{n+1}$.

Avec $\dfrac{n+1}{n-k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{(n+1)n!}{(n-k+1)k!(n-k)!} = \dbinom{n+1}{k}$ on obtient $S_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sigma_k x^{n+1-k}$.
La propriété est vraie pour $n+1$, elle est donc démontrée par récurrence.

17. Pour $n \geqslant 2$, $S_n(1) = S_n(0) = \sigma_n$, donc en posant $x = 1$ dans le résultat de la question 16 on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$.

18. On utilise la formule précédente sous la forme: $\sigma_{n-1} = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \sigma_k$. (*)

Écrivons en python une fonction qui calcule σ_N. Pour calculer les coefficients binomiaux on utilisera la relation de récurrence: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n-k+1}{k}\dbinom{n}{k-1}$.

```
def calculsigma(N):
    sigma=[1]                                  (au départ la liste contient σ0)
    for n in range(2,N+2):                     (on applique (*) pour n de 2 à N+1)
        somme=binomial=1.                      (somme et coefficient binomial pour k=0)
        for k in range(1,n-1):                 (pour k de 1 à n-2)
            binomial=binomial * (n-k+1.)/k     (on calcule le coefficient binomial pour k)
            somme=somme+binomial * sigma[k]    (on ajoute le terme d'indice k à la somme)
        sigma.append(-somme/n)                 (on augmente la liste du terme d'indice n-1)
    return sigma[N]
```

Pour $N = 50$ on obtient 7.500866746076968e+24. Remarque: en important la fonction special de scipy, special.bernoulli(50)[50] donne 7.5008667460769792e+24 (erreur relative de 1.4e-15).

Partie III .

1. Appliquons la formule du produit de Cauchy: si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1, si $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a pour rayon de convergence R_2, alors en posant $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\min(R_1, R_2)$.

Prenons $f(z) = S(z)$ avec $R_1 = R$ et $g(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ avec $R_2 = +\infty$.

On calcule $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k = \frac{\sigma_n}{n!}$ si $n \geqslant 2$ (en utilisant la question 17).

Avec $c_0 = \sigma_0$ et $c_1 = \sigma_0 + \sigma_1$ on obtient bien $S(z)e^z = S(z) + z$ pour $|z| < R$.

2. On en déduit pour $|z| < \frac{R}{2}$: $(e^{2iz} - 1)S(2iz) = 2iz$.

Si $z = a + ib$, $e^{2iz} = e^{-2b} e^{2ia}$ donc $e^{2iz} = 1$ si et seulement si $b = 0$ et $a \in \pi\mathbb{Z}$.

On en déduit pour $z \neq 0$ et $|z| < \rho = \min(\frac{R}{2}, \pi)$: $S(2iz) = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$, d'où $iT(z) = iz + S(2iz)$.

Il y a une erreur dans l'énoncé: il faut poser $T(0) = \frac{1}{i}$.

T admet donc un DSE sur le disque ouvert de rayon ρ: $T(z) = z + \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i)^n \sigma_n}{n!} z^n$.

En utilisant $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ et $\sigma_n = 0$ pour n impair $\geqslant 3$ on obtient: $T(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ pour $|z| < \rho$.

3. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x \neq 0$: $2\frac{e^{4ix} + 1}{e^{4ix} - 1} - \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2(e^{4ix} + 1) - (e^{2ix} + 1)^2}{e^{4ix} - 1} = \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1}{e^{4ix} - 1} = \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i\tan(x)$.

On en déduit: $i\tan(x) = \frac{1}{x}(T(2x) - T(x))$ donc $\tan(x) = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} (4^n - 1) x^{2n}$ puisque le coefficient s'annule pour $n = 0$.

En changeant n en $n + 1$: $\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1} \sigma_{2n+2}}{(2n+2)!} (4^{n+1} - 1) x^{2n+1}$.

On en déduit: $t_n = \frac{(-1)^n 4^{n+1} (4^{n+1} - 1)}{(2n+2)!} \sigma_{2n+2}$.

On vérifie que $t_0 = 1$ et en calculant $\sigma_4 = -\frac{1}{30}$ avec la formule (*) on obtient $t_1 = \frac{1}{3}$.