Corrigé de E3A 2014 PC math A

Questions préliminaires

1. Changement de variable dans une intégrale sur un intervalle:

Soit f une fonction continue et intégrable sur I et soit φ une bijection de classe C^1 de J sur I. On peut écrire: $\displaystyle\int_I f = \int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$.

2. Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz):

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \ : \ (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, et dérivable par rapport à x. On suppose que:

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J;

- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I;

- il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

3. Théorème de convergence dominée:

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I. Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et si, pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

Première partie

1. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \arcsin x$ a pour limite $\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers 1 donc I_1 existe et $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

$\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$ a pour limite 1 quand x tend vers 1 donc I_2 existe et $I_2 = 1$.

2. Puisque $\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ au voisinage de 1 et que I_1 existe on en déduit que I_3 existe.

$\varphi(u) = \sin u$ définit une bijection de classe C^1 de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$ donc on peut appliquer la question 1 du préliminaire: $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|}\cos u \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos(2u))\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}(u - \frac{1}{2}\sin(2u))\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) Puisque $\dfrac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et que I_1 existe on déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Nous allons appliquer deux fois le théorème de Leibniz avec $I = \mathbb{R}$ et $J = [0,1[$.

Posons $g(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$. On calcule: $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$.

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \mapsto \dfrac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \dfrac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,1[$ (puisqu'elles sont majorées en valeur absolues par les fonctions qui apparaissent dans I_1, I_2 et I_3);

- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$;

- il existe deux fonctions positives φ_1 et φ_2, continues par morceaux et intégrables sur J, telles que pour tout élément (x,t) de $I\times J$, $\left|\dfrac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_2(t)$ (φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $[0,1[$ car I_2 et I_3 existent).

On en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ et $f''(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

(c) Soit $a\in]0,1[$. Intégrons par parties sur $[0,a]$:

$$\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\right]_0^a - \int_0^a \sqrt{1-t^2}x\cos(xt)\mathrm{d}t$$

d'où $\displaystyle\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \sqrt{1-a^2}\sin(xa) - x\int_0^a \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

En faisant tendre a vers 1 on obtient: $f'(x) = -x(f(x)+f''(x))$.

4. (a) $u'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x)+z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leqslant 0$ donc u est décroissante sur I.

(b) $u(x)\leqslant u(1)$ entraine que $q(x)z^2(x)\leqslant u(1)$; puisque $q(x)\geqslant q_0>0$ on déduit $z^2(x)\leqslant \dfrac{u(1)}{q_0}$ donc $|z(x)|\leqslant \sqrt{\dfrac{u(1)}{q_0}}$: z est bornée sur I.

5. En dérivant deux fois avec la formule de Leibniz on obtient:

$z''(x) = (x^{1/2}y(x))^{(2)} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y(x) + x^{-1/2}y'(x) + x^{1/2}y''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y(x) - x^{1/2}y(x)$.

On en déduit $z''(x) + \left(1+\dfrac{1}{4x^2}\right)\sqrt{x}y(x) = 0$ et donc $q(x) = 1+\dfrac{1}{4x^2}$.

6. La fonction f du **3.** est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie l'équation différentielle du **5.** donc la fonction z associée est de classe C^2 sur I et vérifie $z''(x)+q(x)z(x)=0$ avec $q(x) = 1+\dfrac{1}{4x^2}$.

Comme $q'(x) = -\dfrac{1}{2x^3}\leqslant 0$ on peut appliquer le résultat du **4.(b)** : la fonction z est bornée.

Par suite on a bien l'existence d'un $M>0$ tel que $|f(x)\sqrt{x}|\leqslant M$ pour $x\in I$.

Deuxième partie

1. Dérivons deux fois $z(t) = y(\frac{1}{t})$: $z'(t) = -\dfrac{1}{t^2}y'(\dfrac{1}{t})$ puis $z''(t) = \dfrac{2}{t^3}y'(\dfrac{1}{t}) + \dfrac{1}{t^4}y''(\dfrac{1}{t})$.

On en déduit: $4tz''(t)+8z'(t)-tz(t) = \dfrac{8}{t^2}y'(\dfrac{1}{t}) + \dfrac{4}{t^3}y''(\dfrac{1}{t}) - \dfrac{8}{t^2}y'(\dfrac{1}{t}) - ty(\dfrac{1}{t}) = 4x^3y''(x) - \dfrac{1}{x}y(x)$ en posant $x=\dfrac{1}{t}$.

On a bien montré que $4tz''(t)+8z'(t)-tz(t)=0$ si et seulement si $4x^4y''(x)-y(x)=0$.

2. (a) Supposons $u(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$ pour $t\in]-R,R[$. On peut dériver terme à terme sur cet intervalle d'où

$u'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na_nt^{n-1}$ et $u''(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^{n-2}$. On en déduit:

$$4tu''(t)+8u'(t)-tu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}4n(n-1)a_nt^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}8na_nt^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^{n+1}.$$

En posant $n'=n+2$ dans le dernier sigma on obtient:

$$4tu''(t)+8u'(t)-tu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}4n(n+1)a_nt^{n-1} - \sum_{n'=2}^{+\infty}a_{n'-2}t^{n'-1} = 8a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(4n(n+1)a_n - a_{n-2})t^{n-1}.$$

Si $4tu''(t)+8u'(t)-tu(t)=0$ on déduit par unicité des coefficients d'un DSE que $a_1=0$ et que $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4n(n+1)}$ pour $n\geqslant 2$.

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout p: $a_{2p+1}=0$.

Puis démontrons par récurrence que $a_{2p} = \dfrac{1}{4^p(2p+1)!}$. C'est vrai pour $p = 0$ puisque $a_0 = u(0) = 1$. Supposons la propriété vraie pour un entier p. On en déduit en posant $n = 2p+2$ dans l'égalité obtenue pour a_n: $a_{2p+2} = \dfrac{a_{2p}}{4(2p+2)(2p+3)} = \dfrac{1}{4^p(2p+1)!4(2p+2)(2p+3)} = \dfrac{1}{4^{p+1}(2p+3)!}$ qui est bien la propriété voulue pour $p+1$.

Réciproquement si la suite (a_n) vérifie pour tout p: $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{1}{4^p(2p+1)!}$ on déduit que u vérifie bien $4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0$ et que le rayon de convergence de la série entière est infini puisque la limite en $+\infty$ de $\dfrac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}$ est nulle (c'est $(2p+1)!$ qui s'impose à t^{2p}).

(b) On vient de montrer que le rayon de convergence de la série entière est infini.

On reconnait pour $t \neq 0$: $u(t) = \dfrac{2}{t}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t}{2})^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{2}{t}\sinh(\frac{t}{2})$.

3. On obtient une solution de (E_1) par $y(x) = z(\dfrac{1}{x}) = u(\dfrac{1}{x}) = 2x\sinh(\dfrac{1}{2x})$.

La limite de $\dfrac{y(x)}{x}$ en $+\infty$ est bien nulle.

Troisième partie

1. (a) $|u_{n+1} - u_n| = |f((n+1)^2) - f(n^2)| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$ pour $s = (n+1)^2 \geqslant u = n^2 \geqslant 1$. Comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument.

(b) La convergence absolue entraine la convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. On en déduit la convergence de la suite $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|f(n^2) - L| \leqslant \varepsilon$.

Pour $s \geqslant n^2$ on a $|f(s) - f(n^2)| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$. Pour obtenir $\dfrac{C}{n^2} \leqslant \varepsilon$ il suffit de choisir $n \geqslant \sqrt{\dfrac{C}{\varepsilon}}$.

Soit $n_1 \geqslant \max(n_0, \sqrt{\dfrac{C}{\varepsilon}})$. Pour $s \geqslant n_1$ on a $|f(s) - L| \leqslant |f(s) - f(n_1^2)| + |f(n_1^2) - L| \leqslant 2\varepsilon$.

Comme ε est arbitraire on a bien montré que $f(s)$ a pour limite L quand s tend vers $+\infty$.

2. (a) Puique $g'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ il existe $A > 0$ tel que $|g'(x)| \leqslant 1$ pour $x \geqslant A$. Comme g' est continue sur le segment $[0, A]$ elle est y est bornée: $|g'(x)| \leqslant M_1$.
On a donc bien $|g'(x)| \leqslant \max(M_1, 1) = M$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $f_n(t) = g'(tx_n)$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
f_n est continue et donc intégrable sur le segment I.
$f_n(0) = g'(0)$ et pour $t > 0$, $f_n(t)$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout n et tout $t \in I$ on a $|f_n(t)| \leqslant M$ qui est intégrable sur I.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 g'(tx_n)\mathrm{d}t$ a pour limite $\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}t = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Le calcul de l'intégrale donne $\displaystyle\int_0^1 g'(tx_n)\mathrm{d}t = \left[\frac{g(tx_n)}{x_n}\right]_0^1 = \frac{g(x_n) - g(0)}{x_n}$ qui a donc pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme x_n tend vers $+\infty$ on déduit que $\dfrac{g(0)}{x_n}$ tend vers 0 et donc $\dfrac{g(x_n)}{x_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(c) Utilisons la caractérisation séquentielle d'une limite:

la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour toute suite x_n qui tend vers $+\infty$ la suite $\dfrac{g(x_n)}{x_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. Posons $g(x)=h(x)-Lx$. On a $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{h(x)}{x}-L$ et $g'(x)=h'(x)-L$.

Si $h'(x)$ a pour limite L quand x tend vers $+\infty$ alors $g'(x)$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

Par le **2.**, $\dfrac{g(x)}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{h(x)}{x}$ a pour limite L quand x tend vers $+\infty$.

4. On applique le **3.** en se limitant à l'intervalle $[1,+\infty[$.

Quatrième partie

1. $y'(s)-y'(u)=\displaystyle\int_u^s y''(t)\mathrm{d}t=-\int_u^s q(t)y(t)\mathrm{d}t.$

2. Pour $u=1$ on déduit du **1.**: $\displaystyle\int_1^x (y'(s)-y'(1))\mathrm{d}s=-\int_1^x\left(\int_1^s q(t)y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$

On en déduit que $y(x)-y(1)-(x-1)y'(1)=-\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^s q(t)y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$

En divisant par x on obtient l'égalité voulue.

3. (a) La fonction $x\mapsto\left|\dfrac{y(x)}{x}\right|$ est continue sur le segment $[1,A]$ donc elle est bornée est y atteint son maximum.

(b) En appliquant l'inégalité triangulaire à l'égalité du **2.** on obtient avec $x\geqslant 1$ et $\left|\dfrac{x-1}{x}\right|\leqslant 1$:

$\left|\dfrac{y(x)}{x}\right|\leqslant|y(1)|+|y'(1)|+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^s|q(t)y(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$. Avec $|y(t)|\leqslant M_At$ on obtient l'inégalité voulue.

(c) $\displaystyle\int_1^s|tq(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_1^{+\infty}|tq(t)|\mathrm{d}t=r$ donc pour tout x on a:

$\left|\dfrac{y(x)}{x}\right|\leqslant|y(1)|+|y'(1)|+\dfrac{M_A}{x}\displaystyle\int_1^x r\mathrm{d}s\leqslant|y(1)|+|y'(1)|+M_Ar.$

Cela entraine que $M_A\leqslant|y(1)|+|y'(1)|+M_Ar$ d'où $M_A\leqslant\dfrac{|y(1)|+|y'(1)|}{1-r}$.

4. Pour tout $A>1$ on a pour $x\in[1,A]$: $\left|\dfrac{y(x)}{x}\right|\leqslant M_A\leqslant\dfrac{|y(1)|+|y'(1)|}{1-r}$. Par suite on a pour tout $x\geqslant 1$: $\left|\dfrac{y(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{|y(1)|+|y'(1)|}{1-r}=M$. La fonction $x\mapsto\dfrac{y(x)}{x}$ est bornée par M sur $[1,+\infty[$.

5. (a) $|y'(s)-y'(u)|\leqslant\displaystyle\int_u^s|q(t)y(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_u^s Mt|q(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_u^s M\frac{t^2}{u}|q(t)|\mathrm{d}t$ puisque $1\leqslant\dfrac{t}{u}$.

Donc $|y'(s)-y'(u)|\leqslant\dfrac{M}{u}\displaystyle\int_1^{+\infty}t^2|q(t)|\mathrm{d}t=\frac{K}{u}$.

Il suffit d'appliquer le résultat du **1.** de la troisième partie avec $f=y'$ pour obtenir que $y'(x)$ possède une limite L en $+\infty$.

(b) Il suffit d'appliquer le résultat du **4.** de la troisième partie avec $u=y$ pour obtenir que $\dfrac{y(x)}{x}$ a pour limite L en $+\infty$.

6. Pour l'équation différentielle (E_1) de la seconde partie on a $q(x)=-\dfrac{1}{4x^4}$. Cette fonction est continue sur $[1,+\infty[$ et de plus la fonction $x\mapsto x^2q(x)=-\dfrac{1}{4x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, ce qui entraine que $x\mapsto xq(x)=-\dfrac{1}{4x^3}$ y est aussi intégrable. On peut donc appliquer le résultat du **5.(b)** et $\dfrac{y(x)}{x}$ a une limite L en $+\infty$.