Corrigé de E3A 2013 PC math B

Exercice n^{o}1 :

I. Etude d'un exemple numérique

1) Toute matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable en base orthonormale.
Si on note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice S et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il existe donc une base orthonormale $\mathcal{C}$ et une matrice $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ (matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$) telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit diagonale (notée D) et telle que ${}^tOSO = D$.

2) Pour déterminer les matrices O et D on effectue la diagonalisation. On remarque tout d'abord à l'aide de la seconde colonne que 2 est valeur propre de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de difficulté grâce à cette seconde colonne, par rapport à laquelle on développe le déterminant :

$$\chi_S(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 2 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 2 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)\left[(3-X)^2-4\right] = (-1)^3(X-1)(X-2)(X-5)$$

On calcule sans difficulté un vecteur directeur de E_1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on choisit donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme premier vecteur de la base $\mathcal{C}$. Le second a été donné dans la remarque préliminaire et on calcule le dernier en faisant le produit vectoriel des deux premiers de façon à assurer que la base est orthonormale directe et qu'ainsi le déterminant de la matrice de passage est positif. On obtient donc :

$$O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice S est symétrique définie positive car elle est symétrique et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

3) Pour déterminer T, on procède par analyse et synthèse.

– Supposons qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}$ telle que $S = {}^tTT$ et notons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0, b > 0, c > 0$$

On a alors

$$S = {}^tTT \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ ad = 0 \\ af = 2 \\ d^2 + b^2 = 2 \\ df + be = 0 \\ f^2 + e^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ d = 0 \\ f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{2} \\ e = 0 \\ c = \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases}$$

Ainsi, si T existe, elle est unique et vaut :

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix}$$

– Réciproquement, la matrice T ci dessus est bien un élément de $\mathcal{T}_3^{++}$ et vérifie $S = {}^tTT$ à cause des équivalences établies dans l'analyse.

II. Résultats préliminaires

1) On vérifie les axiomes de la définition d'un produit scalaire :

- L'application φ_S est linéaire par rapport à chacune de ses variables d'après les régles du produit matriciel et de la transposée.
- L'application φ_S est symétrique car $\varphi_S(X,Y) = {}^t\varphi_S(Y,X)$ et un réel est égal à sa transposée.
- Comme $S \in \mathcal{S}_n^+$ alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \geq 0$ et donc φ_S est positive.
- Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, ${}^tXSX > 0$ et donc φ_S est définie positive.

L'application φ_S est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) On vérifie sans difficulté que $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ car le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des coefficients diagonaux. On vérifie aussi que cet ensemble est stable par multiplication et par passage à l'inverse (la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 fournit le résultat immédiatement). Enfin, comme la matrice identité appatient à $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$, celui-ci n'est pas vide et c'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ par caractérisation.

III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives

1) On a ${}^tB = {}^t\left({}^tAA\right) = {}^tA\,{}^t\left({}^tA\right) = B$ donc B est symétrique.

2) Soit $\lambda \in Sp(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a donc $Bx = \lambda x$. Calculons :

$$\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = \left(x|\,{}^tAAx\right) = (x|Bx) = (x|\lambda x) = \lambda\|x\|^2$$

Comme x est un vecteur propre, il est non nul et $\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$.

3) On procède par double implication :
- Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ aussi et donc B aussi par produit.
  On a donc $0 \notin Sp(B)$ d'où $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
- Réciproquement, si $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors B est inversible et l'égalité : $I_n = B^{-1}B = B^{-1}\,{}^tAA$ assure l'inversibilité (à gauche donc à droite en dimension finie) de A.

On a montré que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et, comme $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a le résultat annoncé.

IV. Décomposition de Cholesky

1) Comme $\mathcal{T}_n^{++} \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$; le résultat découle de la partie précédente directement en posant $A = T$.

2) **a)** Tout d'abord, d'après la question II. 2), $\Delta \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, ses coefficients diagonaux sont donc strictement positifs. D'autre part :

$${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2 \Rightarrow T_1\left(T_2\right)^{-1} = \left({}^tT_1\right)^{-1}{}^tT_2 = {}^t\left(T_2T_1^{-1}\right).$$

Encore d'après II.2), $T_2T_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ de sorte que sa transposée est triangulaire inférieure. La matrice Δ est donc triangulaire supérieure et inférieure donc diagonale.

b) Calculons $\Delta^2 = \Delta\,{}^t\Delta = T_1\left(T_2\right)^{-1}\,{}^t\!\left(T_1\left(T_2\right)^{-1}\right) = T_1\left(T_2\right)^{-1}\left(T_2T_1^{-1}\right) = I_n$

c) Comme Δ est diagonale, Δ^2 aussi et ses coefficients diagonaux sont les carrés de ceux de Δ. L'égalité de la question précédente et la positivité des coefficients diagonaux de Δ permet alors d'affirmer que $I_n = \Delta = T_1\left(T_2\right)^{-1}$. D'où $T_1 = T_2$.

3) **a)** D'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt on sait que :
- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,...,e_i) = \mathrm{Vect}(v_1,...,v_i)$. De sorte que les matrices de passages entre ces deux bases sont triangulaires supérieures.
- Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$,le produit scalaire $(e_j|v_j)$ est strictement positif. Ces produits scalaires sont les coefficients diagonaux des matrices de passages entre ces deux bases.

Les deux conditions précédentes permettent d'affirmer que $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) La base b' est orthonormée pour le produit scalaire φ_S par définition. La matrice de φ_S dans b' est donc I_n (qui est aussi la matrice du produit scalaire usuelle sur b). La formule de changement de base pour une application bilinéaire s'écrit :

$$\mathcal{P}ass(b',b)\mathcal{M}at_{b,b}(\varphi_S)\mathcal{P}ass(b,b') = \mathcal{M}at_{b',b'}(\varphi_S) = I_n$$

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{M}at_{b,b}(\varphi_S) = S$ à partir de la relation définissant φ_S.
On a donc : $TS\,{}^tT = I_n \Rightarrow S = {}^tTT$.

Exercice n^{o}2 :

1) Théorème de dérivation pour des intervalles de $\mathbb{R}$:
Si la fonction $f : I \times J \to \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $I \times J$ et si on suppose de plus que :
- $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
- $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- $\forall t \in J$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I,
- Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall x \in I, \forall t \in J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$.

2) 'Etude de g :

a) La fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ par opération sur des fonctions continues. Comme $1 - e^{-t} \sim t$ en 0, la limite de g en 0 est 1 et g est continue en 0.

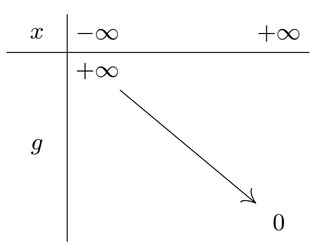
b) On utilise le développement limité à l'ordre 2 de l'exponentielle en 0 pour obtenir :

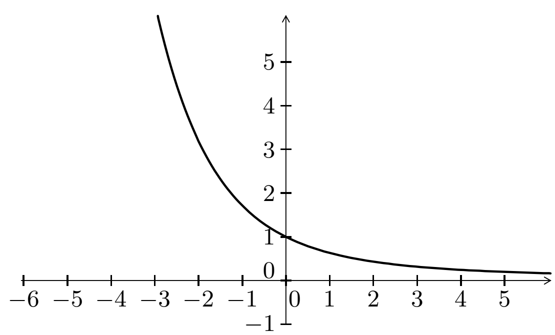
$$g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} = \frac{1-(1-t+\frac{1}{2}t^2+t^2\epsilon(t))}{t} = 1 - \frac{1}{2}t - t\epsilon(t)$$

avec $\epsilon(t) \mapsto 0$ quand $t \mapsto 0$.
Ainsi g admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, elle est donc dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$. La fonction g est bien entendu dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables.

c) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (1+t)e^{-t} - 1$ est dérivable par opérations et $f'(t) = -te^{-t}$ est du signe de $-t$. La fonction f admet donc un maximum global en $t = 0$ qui vaut $f(0) = 0$. On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (1+t)e^{-t} - 1 \leq 0$.

d) On sait que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve que $\forall t \in \mathbb{R}^*, g'(t) = \frac{f(t)}{t^2}$; g' est donc du signe de f et la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de g aux bornes du domaine de définition sont évidentes.





e) i) La fonction g possède un développement en série entière au voisinage de l'origine obtenu grâce à celui de l'exponentielle. Le rayon de convergence est encore $+\infty$ et l'expression du dévelopement est : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-t)^{k-1}}{k!}$

ii) Comme g admet un développement en série entière de rayon non nul en 0, elle est de classe C^∞ en 0 et son développement coïncide avec sa série de Taylor de sorte que pour tout $k \geq 0$, $\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$ ce qui implique $g^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{k+1}$. La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

3) **a)** La fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0 de sorte qu'elle est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calculons pour $M > \frac{\pi}{2}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\sin(u)}{u}du$. Cette intégrale est bien définie car la fonction sous le signe intégrale est continue.

Les fonctions $u \mapsto \frac{1}{u}$ et cos sont de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{2}, M]$ de sorte que la formule d'intégration par parties donne :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = \left[-\frac{\cos(u)}{u}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{\cos(M)}{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u$$

Dans cette dernière égalité, le premier terme converge vers 0 quand M tend vers l'infini tandis que l'intégrale a une limite finie car absolument convergente par comparaison à une intégrale de Riemann ($|\frac{\cos(u)}{u^2}| \leq \frac{1}{u^2}$). La première intégrale impropre est donc convergente.

b) Pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente et en $x = 0$ la question a) assure l'existence de $h(x)$. Ainsi h est définie sur $[0, +\infty[$ et $h(0) = 0$.

c) Soit $a > 0$. On utilise ici le théorème de dérivation de la question 1) sur l'intervalle $I_a = [a, +\infty[$.
La fonction $f : I_a \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \frac{1-e^{xt}}{t}\sin(t)$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $I_a \times \mathbb{R}^{+*}$ qui vaut : $e^{-xt}\sin(t)$
– $\forall x \in I_a, t \mapsto \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après la question b).
– $\forall x \in I_a, t \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ par opérations.
– $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, x \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur I_a par opérations.
– $\forall x \in I_a, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, |e^{-xt}\sin(t)| \leq e^{-at}$ qui est une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
La fonction h est donc dérivable sur I_a. On en conclut que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x > 0$, $h'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t$. On calcule cette dernière intégrale en utilisant le calcul d'une intégrale à valeur complexe :

$$h'(x) = \lim_{M \mapsto +\infty}\left(\int_0^M e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t\right) = \lim_{M \mapsto +\infty}\left(\mathcal{I}m\left(\int_0^M e^{-xt}e^{it}\mathrm{d}t\right)\right)$$

Or $\displaystyle\int_0^M e^{-xt}e^{it}\mathrm{d}t = \left[\frac{et(-x+i)}{-x+i}\right]_0^M = \frac{e^{M(-x)}e^{Mi}}{-x+i} - \frac{1}{-x+i} = \frac{e^{M(-x)}e^{Mi}}{-x+i} - \frac{-x-i}{1+x^2}$. Le complexe $e^{M(-x)}e^{Mi}$ tend vers 0 quand $M \mapsto +\infty$ car son module $e^{M(-x)}$ tend vers 0. En passant à la partie imaginaire on obtient que $h'(x) = \mathcal{I}m\left(-\frac{-x-i}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$.

d) On effectue pour tout $x > 0$ le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale définissant h. La fonction $t \mapsto xt$ établit une bijection qui est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui même. On a alors :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{xt}}{xt}\sin(\frac{xt}{x})x\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^u}{u}\sin(\frac{u}{x})dt = \int_0^{+\infty} g(u)\sin(\frac{u}{x})\mathrm{d}u$$

e) Les fonctions g et $u \mapsto -x\cos(\frac{u}{x})$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut donc appliquer la formule d'intégration par partie afin d'obtenir :

$$h(x) = \left[-g(u)x\cos(\frac{u}{x})\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} g'(u)\cos(\frac{u}{x})\mathrm{d}u = x + x\int_0^{+\infty} g'(u)\cos(\frac{u}{x})\mathrm{d}u$$

f) Par l'inégalité triangulaire, pour tout $x > 0$:

$$|h(x)| \leq |x| + |x|\int_0^{+\infty} |g'(u)|\mathrm{d}u = |x| - |x|\int_0^{+\infty} g'(u)\mathrm{d}u = 2x$$

On vérifie qu'à chaque étape les intégraless écrites convergent.

g) On a montré que h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc h y est continue et l'inégalité précédente assure que la limite de h en 0 est $0 = h(0)$. Ainsi h est aussi continue en 0. La formule obtenue en c) donne directement $\forall x \geq 0, h(x) = \mathrm{Arctan}(x)$

h) D'après la formule précédente, on a $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. Or $h(x) = \alpha - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$, montrons que cette dernière intégrale tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

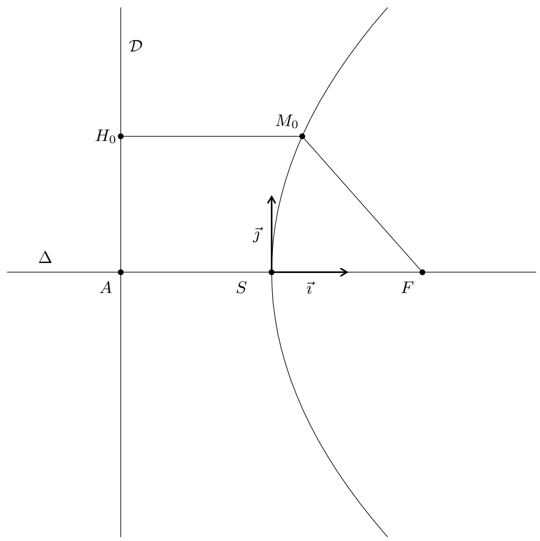
$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$$

Or pour tout $t \geq 0$, $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq 1$ et comme $\displaystyle\int_0^M e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-xM}}{x} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$ on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}$$

Et l'intégrale tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Exercice n^{o}3 : Commençons par faire une figure avec les éléments de l'énoncé :



1) **a)** Le point S est l'origine du repère $\mathfrak{R}$ donc $S(0,0)$. Comme $AS = SF = \frac{p}{2}$, on a $A(-\frac{p}{2},0), F(\frac{p}{2},0)$. La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à Δ (dirigée par $\vec{i}$) et passe par A, une équation de cette droite est donnée par : $x = -\frac{p}{2}$.

b) Soit $M(x,y)$ dans $\mathfrak{R}$.

$$\mathcal{M} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MA \Leftrightarrow MF^2 = MA^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px$$

2) **a)** Soit $M(x,y)$ dans $\mathfrak{R}$.

$$M \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow Det\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}(t_0)\right)$$

où $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ est un vecteur tangent à la courbe en t. On a donc :

$$M \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x(t_0)) \times y'(t_0) - x'(t_0) \times (y - y(t_0)) = 0.$$

Cette dernière égalité donne une équation de $\mathcal{T}_0$. Quant à $\mathcal{N}_0$, on écrit que les deux vecteurs précédents sont orthogonaux, ce qui mène à :

$$(x - x(t_0)) \times x'(t_0) - y'(t_0) \times (y - y(t_0)) = 0$$

En remplaçant par les expressions, on obtient :

$$\mathcal{T}_, : x - \frac{t_0}{p}y + \frac{t_0^2}{2p} = 0 \qquad\qquad \mathcal{N}_0 : x\frac{t_0}{p} + y - (t_0 + \frac{t_0^3}{2p^2}) = 0$$

b) i) Par définition de la parabole $\mathcal{P}$, on a $M_0F = M_0H_0$ de sorte que FH_0M_0 est isocèle en M_0 (ou aplati dans le cas où $M_0 = S$).

ii) On a $\overrightarrow{FH_0}(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}, y_0)$ et $\mathcal{T}_0$ est dirigée par $(\frac{t_0}{p}, 1)$. Comme ces deux vecteurs sont orthogonaux, $\mathcal{T}_0$ est alors la hauteur issue de M_0 dans le triangle FH_0M_0 qui est isocèle, c'est donc aussi la médiatrice de $[FH_0]$.

3) **a)** Pour déterminer les vecteurs du repère de Frenet on se contente de normaliser un vecteur directeur de $\mathcal{T}_0$ et de considérer un vecteur normé qui lui est directement orthogonal. On obtient :

$$\overrightarrow{T_0}\left(\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2+p^2}},\frac{p}{\sqrt{t_0^2+p^2}}\right) \qquad \overrightarrow{N}_0\left(-\frac{p}{\sqrt{t_0^2+p^2}},+\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2+p^2}}\right)$$

b) En t_0, la courbure est donnée par $\gamma(t_0)=\frac{x'(t_0)y''(t_0)-x''(t_0)y'(t_0)}{(x'(t_0)^2+y'(t_0)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{p\left(\frac{t_0^2}{p^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-p^2}{\left(t_0^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Ainsi le rayon de courbure vaut $R_0=\frac{-\left(t_0^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$.

c) En écriture affine on a : $\Omega_0=M_0+R_0\overrightarrow{N_0}=\left(\frac{t_0^2}{2p}+\frac{t_0^2+p^2}{p};t_0-\frac{t_0(t_0^2+p^2)}{p^2}\right)=\left(\frac{3t_0^2}{2p}+p;-\frac{t_0^3}{p^2}\right)$

4) **a)** On remarque que la courbe paramétrée $(\mathcal{C})$ est le lieu des centres de courbure quand $p=2$.
Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$ de sorte qu'on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}^+$ et obtenir la courbe entière par symétrie d'axe (Ox).

b) L'étude des fonctions x et y ne pose aucun problème et mène au tableau de variations ci-dessous :

t	0		$+\infty$
x	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$

c) Les dérivées de x et de y s'annulent en $t=0$, leur développement limité est donné par leur expression car ce sont des polynômes. On a donc, en posant $f(t)=(x(t),y(t))$, d'après la formule de Taylor $\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}=\left(\dfrac{3}{4},0\right)$ et $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}=\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$, on a donc un point de rebroussement de première espèce.

d) Lorsque $t\to+\infty$, on a une branche infinie car x et y tendent vers l'infini. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ de sorte qu'on a une branche parabolique d'axe (Oy).

e) Pour $p=2$, on a :