Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les trois parties sont relativement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Préambule

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $\quad \mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \mathrm{sh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}.$

a) Préciser un équivalent simple de $\mathrm{ch}(t)$ et de $\mathrm{sh}(t)$ lorsque le réel t tend vers $+\infty$.

b) Établir les tableaux de variation (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$: $\quad g_1 : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ et $\quad g_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)}$.

Partie I : Intégrales et développements en série

I-1.1. Justifier l'existence de : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

I-1.3. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha > 0$, la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\, dt$.

I-2.1. Justifier que pour tout $t \geq 0$, on a: $\quad \dfrac{e^t}{2} \leq \mathrm{ch}(t) \leq e^t$

I-2.2. En déduire l'existence de $C_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un encadrement du rapport $\dfrac{C_n}{I_n}$.

I-2.3. Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $\quad t \mapsto \mathrm{Arctan}(e^t), \quad$ calculer C_0.

I-2.4. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\quad \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}.$

I-2.5. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$

On énoncera et on appliquera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

I-2.6. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$.

I-3.1. Montrer l'existence de : $\quad S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{sh}(t)}\, dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I-3.2. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\quad \dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}.$

I-3.3. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}.$

I-4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{si } t \in]0, \pi[\quad \text{et} \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

I-4.1. Déterminer les coefficients de Fourier $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

I-4.2. Grâce à des résultats que l'on précisera sur les séries de Fourier et appliqués à φ retrouver la valeur de C_0 et donner la valeur de S_1.

Partie II : Intégrales à paramètre

II-1. Pour tout réel x on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\mathrm{ch}(t)}\, dt$

II-1.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

II-1.2. Montrer que F est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Justifier grâce à **I-2.2** que le rayon de convergence de ce développement vaut 1.

Pour cela on exprimera d'abord e^{ixt} comme somme d'une série.

II-1.3. En effectuant une intégration par parties, majorer $|xF(x)|$ indépendamment du réel x. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

II-2. Pour tout réel x on pose : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\, dt$

II-2.1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **I-2.4**, justifier que :

$$\left| \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \quad \leq \quad e^{-(2n+3)t}$$

II-2.2. En déduire que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\, dt \right) \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\, dt.$$

II-2.3. Pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\, dt.$

II-2.4. Conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

II-3. Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. On considère $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$h_x(t) = \mathrm{sh}(xt) \quad \text{si } t \in]-\pi, \pi[\qquad \text{et} \qquad h_x(\pi) = h_x(-\pi) = 0.$$

II-3.1. Justifier que h_x est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

II-3.2. Déterminer les coefficients de Fourier : $b_n(h_x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II-3.3. En déduire : $H(x) = \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}$.

On pourra admettre la relation, valable pour tout réel a : $\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a)$.

Partie III : Étude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à : $\mathcal{S} = \{y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}\}$.

III-1. En utilisant ch et sh, déterminer toutes les $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $y'' = y$.

III-2.1. Donner la forme générale d'une solution $y \in \mathcal{S}$.

On rappelle qu'il y a au moins deux méthodes possibles de résolution :

soit en posant $y(t) = u(t)\operatorname{ch}(t) + v(t)\operatorname{sh}(t)$, *soit en posant* $y(t) = z(t)\operatorname{ch}(t)$ *;*

avec des conditions sur les fonctions u *et* v*, ou sur la fonction* z*, qui seront précisées en cas d'utilisation de l'une de ces méthodes.*

III-2.2. Existe-t-il des solutions impaires dans $\mathcal{S}$?

III-2.3. Expliciter l'unique solution $\theta \in \mathcal{S}$, paire et telle $\theta(0) = 1$.

III-3.1. Déterminer explicitement l'unique suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}.$$

III-3.2. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_0 a_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0.$$

III-3.3. Préciser b_0, b_1, b_2.

III-3.4. Démontrer par récurrence : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |b_n| \leq 1.$

On pourra considérer comme connu que $\operatorname{ch}(1) \leq 2$.

III-3.5. En déduire que pour tout $t \in]-1,1[$, la série $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n}$ converge absolument, avec de plus : $\operatorname{ch}(t)g(t) = 1$.

Remarque : On a ainsi prouvé que $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$.

III-4. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et telle que la série entière définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$, et vérifie :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

III-4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et b_n.

III-4.2. En déduire qu'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leq 1$$

III-4.3. En déduire que la fonction θ considérée en **III- 2.3** est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

III-4.4. Justifier que $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

Fin de l'énoncé.