e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On note $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 \in E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

Pour tout réel $a > 0$, on note $I_a = [-a, a]$.

1. Donner l'expression du développement en série entière de la fonction exponentielle et préciser son domaine de validité.

2. Soient g un élément de E et β un réel.

2.1 Démontrer que l'application $G : x \longmapsto G(x) = e^x \displaystyle\int_\beta^x g(t)\,e^{-t}\,dt$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - y(x) = g(x)$$

2.2 Calculer $G(\beta)$.

2.3 Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

2.4 Énoncer un problème de Cauchy, lié à l'équation $(\mathscr{E})$, dont G est l'unique solution.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda\, y''(x) - (1+\lambda)\, y'(x) = 0$$

4. Démontrer qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in I_a,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f_k(x)| \leqslant M\,\frac{|x|^k}{k!}$$

5. Démontrer alors que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F.

6. Démontrer que F est de classe C^1 sur I_a, puis sur $\mathbb{R}$.

7. Calculer $F(0)$.

8. Prouver que F est solution d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

9. Donner alors une expression de F en fonction de f_0.

10. Dans cette question, on prend $f_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto f_0(x) = x^2$. Déterminer précisément F.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

11.1 Prouver qu'il existe des scalaires $(a_0, ..., a_n)$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f_{n+1}^{(n+1)}(t)\,dt$$

11.2 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f_0(t)\,dt$$

11.3 En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_0^x f_0(t)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}\right)dt$$

11.4 Retrouver alors l'expression de F obtenue à la question 9.

12. Soit $\psi : f \in E \longmapsto H = \psi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad H(x) = e^{x} \int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt$$

12.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de E.

12.2 ψ est-elle injective ?

12.3 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ψ.

EXERCICE 2

Question préliminaire :

Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que : $(1+\alpha)(1+\beta) \geqslant (1+\alpha+\beta)$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour $n \geqslant 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n\, v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \qquad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\, \Delta_{n-2}$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel j.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

5.1 Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

5.2 Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

6.1 Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.

6.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$

Etudier la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} t_n$.

6.3 Prouver alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

Exercice 3

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2\,t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2\,t) \end{cases}$$

1. Soit $\mathscr{D}_1$ la partie de la courbe $\mathscr{D}$ correspondant à $t \in [0, \pi]$.

Montrer que l'on obtient toute la courbe $\mathscr{D}$ à partir de $\mathscr{D}_1$: préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.

2. **2.1** Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

2.2 Montrer que la courbe $\mathscr{D}_1$ présente deux points singuliers pour $t = 0$ et pour $t = t_0$ que l'on déterminera.

On note I le point de paramètre t_0.

3. Donner l'allure de la courbe au voisinage du point O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4. Montrer que le vecteur $\vec{u_0} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{D}_1$ en I.

Ecrire une équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

On admet que le point I est un point de rebroussement de première espèce.

5. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3, 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

5.1 Vérifier que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point Ω.

5.2 Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_1$.

5.3 Soit J le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

6. Tracer dans $\mathscr{P}$ muni du repère $\mathscr{R}$, les courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathcal{T}$.

7. Montrer que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Calculer la longueur de $\mathscr{D}$.

Fin de l'épreuve