Concours e3a PC 2012
Epreuve de Mathématiques B
Corrigé

Exercice 1

1. D'après le cours, le développement en série entière de l'exponentielle est

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Son rayon de convergence étant $+\infty$, son domaine de validité est $\mathbb{R}$.

2. 2.1 Par continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto e^{-t}g(t)$ et par théorème fondamental de l'intégration, $x \longmapsto \int_\beta^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \longmapsto e^{-x}g(x)$.
Alors G est C^1 sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^x \int_\beta^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t + e^x e^{-x} g(x) = G(x) + g(x)$$

Ainsi G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée.

2.2 $G(\beta) = e^\beta \int_\beta^\beta g(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0$.

2.3 D'une part, l'équation homogène a pour solution : $y : x \in \mathbb{R} \longmapsto c\,e^x$ où $c \in \mathbb{R}$.
D'autre part, on applique la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière : on la cherche sous la forme $y_p(x) = c(x)e^x$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c'(x)e^x = g(x)$$

Choisissons la primitive de c qui s'annule en β, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = \int_\beta^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.
Ainsi, une solution particulière de l'équation différentielle proposée est G et les solutions de $(\mathcal{E})$ sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ce^x + G(x), \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

2.4 D'après le cours (on utilise en pariculier la continuité de $x \longmapsto 1$ et g) et les questions précédentes, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x) + g(x) \\ y(\beta) = 0 \end{cases}$$

a pour unique solution G

3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
On pose $z = y'$ et on se ramène à l' équation différentielle du premier ordre : $\lambda z' - (1+\lambda)z = 0$ dont les solutions sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = a\, e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x}, a \in \mathbb{R}$$

Par intégration, on obtient ainsi :
Si $\lambda = -1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = a\,x + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Si $\lambda \neq -1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = a\,\frac{\lambda}{1+\lambda}e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x} + b = \tilde{a}e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x} + b, \quad (\tilde{a},b) \in \mathbb{R}^2$$

4 f_0 est continue sur le segment I_a donc est bornée. Ainsi, il existe $M \in Ra^+$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_a, |f_0(x)| \leq M$$

Montrons par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M\frac{|x|^k}{k!}$.

On a la relation vérifiée pour $k = 0$.

Supposons : $\forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M\frac{|x|^k}{k!}$ pour k fixé.

Alors $\forall x \in I_a$,

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \int_0^x |f_k(t)|\mathrm{d}t & \text{si } x \geq 0 \\ \int_x^0 |f_k(t)|\mathrm{d}t & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Par la relation de récurrence, on arrive alors à

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \frac{M}{k!}\int_0^x t^k\mathrm{d}t & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{M(-1)^k}{k!}\int_x^0 t^k\mathrm{d}t & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

C'est à dire encore

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \frac{M}{k!}\frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{M(-1)^{k+1}}{k!}\frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

ce qui revient à :

$$\forall x \in I_a, |f_{k+1}(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

ce qui montre la relation vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion :$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M\frac{|x|^k}{k!}$

5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $a > 0$ tel que $x \in I_a$.
La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge (il s'agit d'une série exponentielle), alors par la relation de 4 et le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
En conclusion, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée F.

6 Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivabilité des séries de fonctions. Nous allons l'appliquer pour la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur un intervalle du type I_a pour $a > 0$:

- f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ alors, par théorème fondamental de l'intégration $f_1 : x \longmapsto \int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a et $f_1' = f_0$.
  Par récurrence immédiate, du fait de la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$, on obtient que : $\forall n \geq 1, f_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a et $f_n' = f_{n-1}$.
- $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a.
- Montrons que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n' = \sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I_a : Par la question 4, nous pouvons écrire :

  $$\forall x \in I_a, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M\frac{a^n}{n!}$$

  La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge (il s'agit d'une série exponentielle), alors on obtient la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ sur I_a.

– Conclusion : Par théorème, $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est C^1 sur I_a, pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

7 Par définition, pour tout $n \geq 1$, f_n est la primitive d'une fonction continue qui s'annule en 0, donc $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$.

8 On a vu que $F' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On a alors $F' = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_0 + F$.
Ainsi, F est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - y(x) = f_0(x) \\ \qquad\qquad y(0) = 0 \end{cases}$$

9 Il suffit d'appliquer la question 2.4 avec $\beta = 0$ et $g = f_0$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} \mathrm{d}t$$

10 Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x \int_0^x t^2 e^{-t} \mathrm{d}t$$

On procède par deux intégrations par partie :

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & e^x \left(-x^2 e^{-x} + 2 \int_0^x t e^{-t} \mathrm{d}t\right) \\ & = & e^x \left(-x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x\right)\right) \\ & = & 2e^x - x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

Remarque : on vérifie que $F(0) = 0$ comme indiquée à la question 7

11 11.1 Etant donné que, pour tout $n \geq 0$, f_{n+1} est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_{n+1}' = f_n$, on établit par récurrence, que f_{n+1} est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et, on peut ainsi appliquer le formule de Taylor avec reste intégral, ce qui donne la relation demandée.

11.2 Par la formule de Taylor avec reste intégral, $\forall k \in \{0..n\}, a_k = \dfrac{f_{n+1}^{(k)}(0)}{k!}$.
Or, $(\star) \quad \forall p \geq 1, f_p(x) = \int_0^x f_{p-1}(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow f_p(0) = 0$ et $f_p' = f_{p-1}$
Montrons par récurrence : $\forall n \geq 1, \forall p \in \{1, .., n\}, f_n^{(p)} = f_{n-p}$.
Vrai pour $n = 1$, d'après $(\star)$
Supposons vrai à un rang n :
Or, $f_{n+1}' = f_n$ donc $\forall p \in \{1, .., n\}, f_{n+1}'^{(p)} = f_n^{(p)} = f_{n-p} = f_{n+1-(p+1)}$
C'est-à-dire : $\forall p \in \{2, .., n+1\}, f_{n+1}^{(p)} = f_{n+1-p}$ et comme $f_{n+1}' = f_n = f_{n+1-1}$, on obtient finalement

$$\forall p \in \{1, .., n+1\}, f_{n+1}^{(p)} = f_{n+1-p}$$

La relation de récurrence est ainsi vérifiée au rang $n+1$.
Alors, $\forall k \in \{0..n\}, f_{n+1}^{(k)}(0) = f_{n+1-k}(0) = 0$ car $n + 1 - k \geq 1$ et par $(\star)$, d'où, $a_k = 0$ et $f_{n+1}^{(n+1)} = f_0$.
D'où, la relation demandée.

11.3 Par la question précédente,$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x f_0(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On justifie l'échange somme et intégrale par linéarité de l'intégrale puisqu'il s'agit d'une somme finie.

11.4 Par définition de F,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t)\mathrm{d}t$$

Posons : Pour $x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,x], S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t)$.

Appliquons le théorème de convergence dominée :

– $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues convergente simplement sur $[0,x]$ vers

$$S : t \longmapsto e^{x-t}$$

– S est continue sur $[0,x]$

– $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,x], |S_n(t) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-t|^k}{k!}|f_0(t)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x-t|^k}{k!}|f_0(t)| = e^{|x-t|}|f_0(t)|$

  Avec, $t \longmapsto e^{|x-t|}|f_0(t)|$ positive, continue donc intégrable sur le segment $[0,x]$

– Alors, par théorème de convergence dominée, $F(x) = \displaystyle\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t$

12 12.1 Par théorème fondamental de l'intégration, $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ (on a utilisé l'hypothèse f continue sur $\mathbb{R}$), d'où par produit de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$, H l'est et donc appartient à E.

Ψ est linéaire car : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall(f,g) \in E \times E, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda f + \mu g)(x) &= e^x \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= e^x \lambda \int_0^x f(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \mu \int_0^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\Psi(f)(x) + \mu\Psi(g)(x)\end{aligned}$$

Finalement, $\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Psi(f) + \mu\Psi(g)$ i.e Ψ est linéaire.

12.2 Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0$ et par dérivation, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)e^{-x} = 0$. Puisque exp ne s'annule pas, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ i.e $f = 0$ et le noyau de Ψ est réduit à $\{0\}$ donc Ψ est injective.

12.3 On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ non nuls tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \lambda f(x)$, c'est-à-dire encore $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda e^{-x} f(x)$.

Par dérivation de cette relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)e^{-x} = \lambda(-e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x))$.

– 0 n'est pas valeur propre puisque Ψ est injective.

– Si λ est valeur propre alors tout vecteur propre est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{(1+\lambda)}{\lambda} y$.

  Pour tout λ non nul, cette équation admet les solutions de la forme : $f : x \mapsto ce^{\frac{(1+\lambda)}{\lambda}x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(f)(x) = ce^x \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}t}\, dt = c\lambda\left(e^{\frac{(1+\lambda)}{\lambda}x} - e^x\right)$.

Ainsi $\Psi(f) = \lambda f$ si et seulement si $c = 0$. Donc finalement λ n'est pas valeur propre .

Conclusion : le spectre de Ψ est vide.

Exercice 2

Question préliminaire $(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta+\alpha\beta \geq 1+\alpha+\beta$ puisque $\alpha\beta \geq 0$.

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1v_1$

   $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2v_2 + u_1v_1$

   par développement par rapport à la première colonne

2. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n}u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

   Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_nv_n\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

3. Montrons dans un premier temps par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$.
   La relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.
   Supposons la relation vraie au rang n et $n-1$ où $n \geq 2$.
   Alors, puisque $a_{n+1} \geq 0$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \geq 0$, montrant ainsi la relation vérifiée au rang $n+1$.
   Conclusion : $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$ et alors, $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \geq 0$.
   On a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2v_2 \geq 0$ et on en conclut que $(\Delta_n)_n$ est croissante.

4. On a l'égalité pour $n = 1$ et $\Delta_2 = 1+u_2v_2+u_1v_1 \leq (1+a_1)(1+a_2)$ par la question préliminaire.
   Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n-1$.
   Alors

$$\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)+a_{n+1}\prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k)(1+a_n+a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k)(1+a_n)(1+a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k)$$

   On a utilisé la question préliminaire.
   Ceci termine la récurrence.

5. 5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.
   Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.
   La suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$.
   Or cette série est une série convergente car :
   - elle est à termes positifs.
   - $\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.
   - $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge
   - On conclut par critère d'équivalence.

   Ainsi, $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge. Par continuité de exp et caractérisation séquentielle de la continuité, $(P_n)_n$ converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

5.2 Etant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Etant croissante et majorée, elle converge alors.

6. 6.1 à vérifier par récurrence sur n.

   6.2 Considérons la suite des sommes partielles $(T_n)_n$ de la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$:

   $\forall n \geq 2, T_n = \sum\limits_{k=2}^{n} t_k = \Delta_n - \Delta_1$, par télescopie .

   Par hypothèse, $(\Delta_n)_n$ converge donc il en est de même pour $(T_n)_n$, ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$ converge.

   6.3 $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$ par 6.1.

   Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série $\sum\limits_{n\geq 2} t_n$ converge, on obtient la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n$ et la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$

Exercice 3

1. Les fonctions x et y sont 2π périodiques, il suffit donc d'un intervalle d'amplitude 2π pour tracer toute la courbe. On prend l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ensuite, x est paire et y impaire, ainsi le point de paramètre $-t$ s'obtient à partir de celui de paramètre t par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. C'est pourquoi, il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$.
2. 2.1 $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$.

   2.2 Les points singuliers sont les points de vecteur dérivée première nul.

   Par dérivation, simplification, factorisation (en utilisant 2.1), on arrive à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2\sin(t)(1+2\cos(t)) \\ y'(t) & = & 2(1-\cos(t))(1+2\cos(t)) \end{array}\right.$$

   On en déduit que le vecteur dérivé est nul sur $[0, \pi]$ ssi

$$\sin t = 0 \text{ et } \cos(t) = 1 \text{ ou } 1 + 2\cos(t) = 0$$

   c'est à dire

$$t = 0 \text{ et } t = \frac{2\pi}{3}$$

3. Par un développement limité en 0 à l'ordre 3 de chacune des applications coordonnées, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 3t^2 + o(t^3) \\ y(t) & = & t^3 + o(t^3) \end{array}\right.$$

   C'est à dire encore :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{o}\,(t^3)$$

   ce qui signifie que le vecteur tangent en $M(0) = O$ à la courbe est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autrement dit le vecteur $\vec{i}$, ainsi la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et le premier vecteur dérivée d'ordre supérieur non colinéaire au vecteur tangent est le vecteur dérivée d'ordre 3 et dans ce repère local un point de la courbe a comme coordonnée $(3t^2, t^3)$, ce qui donne l'allure suivante au voisinage du point O :
4. Pour trouver un vecteur directeur de la tangente en $\mathcal{I} = M(\frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, on détermine le premier vecteur dérivé non nul. On sait que celui d'ordre 1 est nul.

   Puis

$$\begin{pmatrix} x''(\frac{2\pi}{3}) \\ y''(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   Ce dernier est colinéaire à $\vec{u_0}$, donc ce dernier est bien un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{D}_1$ en $\mathcal{I}$.

   Une équation de $\mathcal{T}$ s'obtient en écrivant : $M \in \mathcal{T} \iff det(\vec{\mathcal{I}M}, \vec{u_0}) = 0$, c'est ainsi qu'on obtient l'équation : $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$.
5. 5.1 $\sqrt{3} \times 3 - 0 - 3\sqrt{3} = 0$ donc Ω appartient à $\mathcal{T}$.

   5.2 Le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour équation : $(x-3)^2 + y^2 = 9$

   Un point $M(t)$ de la courbe est sur $\mathcal{C}_1$ ssi : $(2\cos(t) + \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 = 9$, ce qui conduit à l'équation $\cos(3t) = 1$. Il suffit de prendre $t \in [0, \pi]$ puis de considérer les symétriques orthogonaux par rapport à $(O, \vec{i})$.

   Or $\cos(3t) = 1$ avec $t \in [0, \pi]$ ssi $3t = 2k\pi$ où $k \in \{0, 1\}$. On retrouve les points O et $\mathcal{I}$.

   Conclusion : $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 = \{O, \mathcal{I}, \mathcal{I}')\}$ où $\mathcal{I}'$ est le symétrique orthogonal de $\mathcal{I}$ par rapport à l'axe des abscisses.

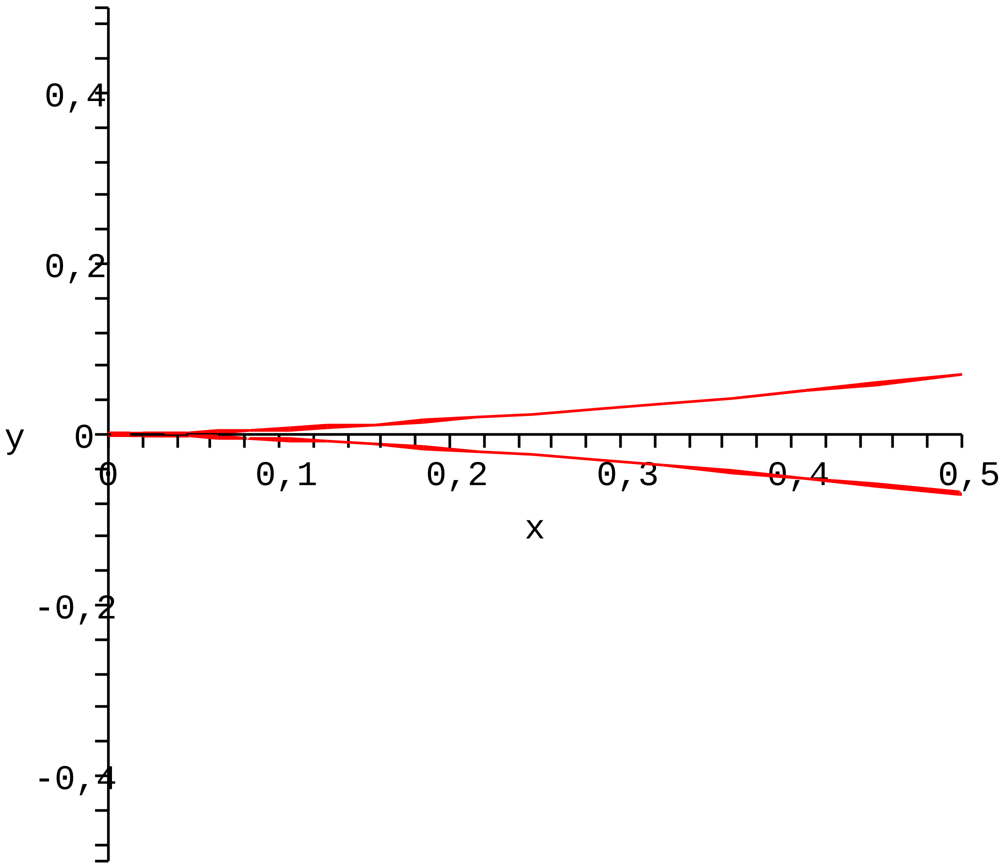

Figure 1 – Allure de la courbe au point stationnaire O

5.3 Un vecteur directeur de la tangente en J est $(x'(\dfrac{\pi}{3}), y'(\dfrac{\pi}{3})) = (2\sqrt{3}, 2)$.

Il reste à vérifier qu'il est orthogonal au vecteur $\vec{\Omega J}$.
Or $\vec{\Omega J}= (\frac{5}{2} - 3, \frac{\sqrt{3}}{2} - 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
On a bien que le produit scalaire entre ce vecteur et un vecteur directeur de la tangente est nul, ce qui signifie que $\mathcal{D}$ est tangente en J à $\mathcal{C}_2$.

6. Le tableau des variations est le suivant :

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	+		+	0	-	0
x	0		$\nearrow$		$\frac{9}{2}$	$\searrow$	4
y'	0	+		+	0	-	-4
y	0		$\nearrow$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

D'où l'allure de la courbe $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$, où on trace aussi les deux cercles et la droite $\mathcal{T}$:

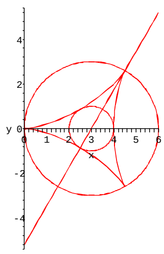

FIGURE 2 – Tracé de la courbe $\mathcal{D}$, des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et de la tangente $\mathcal{T}$ en I

7. Passons par la représentation complexe de la rotation r : L'image de tout point d'affixe z est le point d'affixe $z' = z_\Omega + e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_\Omega)$.
$z_\Omega = 3$ et tout point de la courbe $\mathcal{D}$ a une affixe du type :

$$z(t) = (3 - 2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t))$$

Alors, son image par r est :

$$z'(t) = 3 + e^{i\frac{2\pi}{3}}((-2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t))) = 3 - e^{i\frac{2\pi}{3}}(2e^{-it} + e^{2it}) = z(t - \frac{2\pi}{3})$$

Donc l'image d'un point de la courbe appartient à la courbe, autrement dit $r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Mais on peut écrire aussi, $z(t) = r(z(t + \dfrac{2\pi}{3}))$ c'est-à-dire $\mathcal{D} \subset r(\mathcal{D})$.
Conclusion, $\mathcal{D} = r(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}$ est invariante par cette rotation.

8. Par symétrie, la longueur de cette courbe est :

$$\begin{aligned}
L &= 3\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{(2\sin(t)+2\sin(2t))^2+(2\cos(t)-2\cos(2t))^2}\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{8-8\cos(3t)}\mathrm{d}t \\
&= 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2\sin^2(\frac{3t}{2})}\mathrm{d}t \\
&= 12\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\sin(\frac{3t}{2})|\mathrm{d}t \\
&= 12\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(\frac{3t}{2})\mathrm{d}t \\
&= 12\left[-\frac{2}{3}\cos(\frac{3t}{2})\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}\mathrm{d}t \\
&= 16 \text{ unités de longueur}
\end{aligned}$$