Filière PC – mathématiques **mercredi 18 mai 2011**
Concours E3A, épreuve B, corrigé succinct[1]

Thèmes abordés. Algèbre linéaire, réduction ; intégrales impropres, intégrales à paramètre, séries entières ; coniques, surfaces.

Cet énoncé est composé de trois exercices indépendants. Le premier exercice étudie des sous-algèbres de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels stables par multiplication). Il est très calculatoire vers la fin et globalement progressif dans sa difficulté, même si les deux dernières questions manquent d'indications. Le deuxième exercice fait calculer les deux intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

ainsi qu'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Cet exercice est classique mais assez difficile : de nombreuses questions auraient mérité d'être plus détaillées. Le troisième exercice commence par faire démontrer une propriété optique classique des paraboles : tout rayon issu d'une droite parallèle à l'axe se réfléchit vers le foyer. On construit ensuite un paraboloïde de révolution. Pour finir, on prend deux paraboles de l'espace et on engendre une surface en prenant la réunion des droites qui s'appuient sur les deux paraboles en deux points où les tangentes aux paraboles s'intersectent sur une droite donnée. Cet exercice est assez difficile pour la filière PC, dont les candidats sont traditionnellement peu entraînés en calculs géométriques. De plus, cet exercice pâtit de notations malheureuses.

Pour une épreuve de trois heures, ce sujet est d'une longueur déraisonnable. Sa difficulté n'est pas également répartie sur les trois exercices.

EXERCICE 1

1.i. Le calcul donne $\boxed{\mathrm{K}^2 = 4\mathrm{K}}$, si bien que $\boxed{\text{le polynôme } \mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} \text{ est un polynôme annulateur de K.}}$ Les racines de ce polynôme sont 0 et 4 donc le spectre de la matrice K est inclus dans l'ensemble $\{0, 4\}$. On remarque que la matrice K est de rang 1 (les colonnes sont non nulles et égales entre elles) donc elle n'est pas inversible, si bien que 0 est une valeur propre de K. De plus, si on note C la première colonne de K, on trouve $\mathrm{KC} = 4\mathrm{C}$, ce qui prouve que 4 est aussi une valeur propre de K car C est un vecteur non nul.

Finalement, $\boxed{\text{les valeurs propres de K sont exactement 0 et 4.}}$

1.ii. Comme la matrice K est de rang 1, l'espace propre pour la valeur propre 0 est de dimension 3 d'après la formule du rang. Comme la somme des dimensions des espaces propres ne peut pas dépasser 4, l'espace propre $\mathrm{E}_4(\mathrm{K})$ est de dimension au plus 1. Par ailleurs, il est de dimension au moins 1 (comme tout espace propre) donc il est de dimension exactement 1. La somme des dimensions des espaces propres de K vaut 4 donc cette matrice est diagonalisable[2]. Il existe une matrice Q dans $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{KQ} = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 4).$$

On trouve alors $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = x\mathrm{I} + y\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{KQ} = \mathrm{diag}(x, x, x, x + 4y)$. $\boxed{\text{La matrice M est donc diagonalisable.}}$

Les coefficients diagonaux de la matrice diagonale $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}$ sont x et $x + 4y$.
$\boxed{\text{Les valeurs propres de M sont donc } x \text{ et } x + 4y.}$

1.iii. L'ensemble F est défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs I et K. C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (I, K). À ce titre, c'est un sous-espace vectoriel de E. Comme les matrices I et K ne sont pas colinéaires, cet espace est de dimension 2.

Prenons maintenant M et N dans F. Il existe a, b, c, d dans $\mathbb{R}$ vérifiant les égalités $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{K}$ et $\mathrm{N} = c\mathrm{I} + d\mathrm{K}$. Le calcul donne alors

$$\mathrm{M} \times \mathrm{N} = ac\mathrm{I} + (bc + ad)\mathrm{K} + bd\mathrm{K}^2 = ac\mathrm{I} + (bc + ad + 4bd)\mathrm{K},$$

ce qui prouve que la matrice $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ appartient aussi à F.

$\boxed{\text{L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 qui est stable par produit.}}$

---

[1] Par Édouard Lebeau, professeur de mathématiques en PC* au lycée Henri Poincaré de Nancy. Courriel : `edouardlebeau-pc@yahoo.fr`

[2] On peut aussi justifier ce fait en observant qu'on a trouvé pour K un polynôme annulateur scindé, à racines simples. Cette méthode, bien que plus rapide, ne donne pas la dimension des espaces propres.

1.iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices $x\mathrm{I}$ et $y\mathrm{K}$ commutent donc il est possible d'appliquer la formule du binôme.

$$\mathrm{M}^n = (x\mathrm{I} + y\mathrm{K})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x\mathrm{I})^{n-k} (y\mathrm{K})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \mathrm{K}^k.$$

Une récurrence, que je ne détaille pas, permet d'obtenir l'égalité $\mathrm{K}^k = 4^{k-1}\mathrm{K}$ pour tout entier k strictement positif. On va donc ê amené à séparer le terme d'indice $k = 0$ dans la somme ci-dessus.

$$\mathrm{M}^n = x^n\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k 4^{k-1}\mathrm{K} = x^n\mathrm{I} + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (4y)^k\right)\mathrm{K}.$$

La somme restante est presque une somme donnée par la formule du binôme. Il manque cependant le terme d'indice $k = 0$, que l'on ajoute donc.

$$\mathrm{M}^n = x^n\mathrm{I} + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (4y)^k - x^n\right)\mathrm{K} = x^n\mathrm{I} + \frac{(x+4y)^n - x^n}{4}\mathrm{K}.$$

Une autre méthode consiste à écrire

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}^n\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{Q})^n = \mathrm{diag}(x^n, x^n, x^n, (x+4y)^n) = x^n\mathrm{I} + \frac{(x+4y)^n - x^n}{4}\ \mathrm{diag}(0,0,0,4),$$

puis, en multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}, à retrouver

$$\mathrm{M}^n = x^n\mathrm{I} + \frac{(x+4y)^n - x^n}{4}\mathrm{Q} \times \mathrm{diag}(0,0,0,4) \times \mathrm{Q}^{-1} = x^n\mathrm{I} + \frac{(x+4y)^n - x^n}{4}\mathrm{K}.$$

La matrice M^n est la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent $\frac{(x+4y)^n+3x^n}{4}$ et dont les autres coefficients valent $\frac{(x+4y)^n-x^n}{4}$.

On sait qu'une matrice est inversible si, et seulement si, elle n'admet pas 0 pour valeur propre. Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible est donc que x et $x + 4y$ soient tous deux non nuls. Supposons dans la suite que cette hypothèse est vérifiée.

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{Q})^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x+4y}\right).$$

Comme dans le calcul précédent, on exprime cette matrice comme combinaison linéaire de I et K.

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{Q} = \frac{1}{x}\mathrm{I} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+4y} - \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{diag}(0,0,0,4) = \frac{1}{x}\mathrm{I} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+4y} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{K}\mathrm{Q}.$$

En multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}, on obtient finalement

$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{x}\mathrm{I} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+4y} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{K}.$$

Remarque. On pourrait en fait montrer que dans le cas où M est inversible, la formule obtenue pour M^n est valable pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et pas seulement pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2.i. Le calcul donne $\mathrm{K}^2 = 4\mathrm{K}$, $\mathrm{ZK} = 0$, $\mathrm{KZ} = 0$ et $\mathrm{Z}^2 = 2\mathrm{Z}$, ce qui prouve bien que ces quatre matrices appartiennent à H.

Prenons maintenant M et N dans H. Il existe a, b, c, d dans $\mathbb{R}$ vérifiant les égalités $\mathrm{M} = a\mathrm{K} + b\mathrm{Z}$ et $\mathrm{N} = c\mathrm{K} + d\mathrm{Z}$. On trouve alors

$$\mathrm{M} \times \mathrm{N} = ac\mathrm{K}^2 + ad\mathrm{KZ} + bc\mathrm{ZK} + bd\mathrm{Z}^2 = 4ac\mathrm{K} + 2bd\mathrm{Z},$$

ce qui prouve que $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ appartient à H.

Le sous-espace vectoriel H de E est stable par multiplication.

2.ii. Pour K, les valeurs propres sont déjà connues, à savoir 0 et 4. On sait déjà que l'espace propre $\mathrm{E}_4(\mathrm{K})$ est la droite vectorielle engendrée par la première colonne de K. L'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{K})$, couramment appelé noyau de K, est

l'ensemble des vecteurs ${}^t(x\ y\ z\ t)$ vérifiant l'équation $x+y+z+t=0$. C'est l'hyperplan orthogonal[3] à $\mathrm{E}_4(\mathrm{K})$ pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Une base de cet hyperplan est par exemple la famille des trois vecteurs suivants

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

La relation $\mathrm{Z}^2=2\mathrm{Z}$ montre que $\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}$ est un polynôme annulateur de Z. Les seules valeurs propres possibles de Z sont 0 et 2.

On observe que la matrice Z est de rang 2. En effet, ses deux premières colonnes sont indépendantes et les deux dernières appartiennent à l'espace engendré par les deux premières. La matrice Z admet donc 0 pour valeur propre, avec un espace propre de dimension 2. La somme de la première et de la troisième colonne est nulle donc le vecteur colonne ${}^t(1\ 0\ 1\ 0)$ est un élément de $\mathrm{E}_0(\mathrm{Z})$. De même, le vecteur colonne ${}^t(0\ 1\ 0\ 1)$ est un élément de ce noyau. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et cet espace est de dimension 2, ils forment une base de $\mathrm{E}_0(\mathrm{Z})$.

Le calcul donne $\mathrm{Z}-2\mathrm{I}=\begin{pmatrix}-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\\-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$. Par le même raisonnement, on trouve que les colonnes ${}^t(1\ 0\ -1\ 0)$ et ${}^t(0\ 1\ 0\ -1)$ forment une base de $\mathrm{E}_2(\mathrm{Z})$.

2.iii. On nous demande ici de trouver une base orthonormale de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres à la fois pour K et pour Z.

Comme $\mathrm{E}_4(\mathrm{K})$ est de dimension 1, il est nécessaire de prendre un vecteur de cette droite. Il y a deux choix pour un vecteur de norme 1. On peut prendre par exemple $\frac{1}{2}\,{}^t(1\ 1\ 1\ 1)$.

Ce vecteur appartient à $\mathrm{E}_0(\mathrm{Z})$. On le complète en une base orthonormale de $\mathrm{E}_0(\mathrm{Z})$ avec le vecteur $\frac{1}{2}\,{}^t(1\ -1\ 1\ -1)$.

Il reste à trouver une base orthonormale de $\mathrm{E}_2(\mathrm{Z})$ dont les vecteurs ont toutes leurs coordonnées valant $1/2$ ou $-1/2$. Une possibilité est de prendre les vecteurs $\frac{1}{2}\,{}^t(1\ 1\ -1\ -1)$ et $\frac{1}{2}\,{}^t(1\ -1\ -1\ 1)$.

Finalement, la matrice $\mathrm{Q}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ répond à la question. Plus précisément, on obtient

$$\mathrm{K}'=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{K}\mathrm{Q}=\mathrm{diag}(4,0,0,0)\qquad\text{et}\qquad \mathrm{Z}'=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Z}\mathrm{Q}=\mathrm{diag}(0,0,2,2).$$

On trouve alors

$${}^t\mathrm{Q}\times\begin{pmatrix}a+b&a&a-b&a\\a&a+b&a&a-b\\a-b&a&a+b&a\\a&a-b&a&a+b\end{pmatrix}\times\mathrm{Q}=\mathrm{Q}^{-1}(a\mathrm{K}+b\mathrm{Z})\mathrm{Q}=a\ \mathrm{diag}(4,0,0,0)+b\ \mathrm{diag}(0,0,2,2)=\mathrm{diag}(4a,0,2b,2b).$$

3.i. Voici une question bien calculatoire. On trouve

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}2&\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\\sqrt{2}&2&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}&2&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$$

puis $\mathrm{A}^3=4\mathrm{A}$.

En particulier, comme A^3 est colinéaire à A, $\boxed{\text{la famille } (\mathrm{A},\mathrm{A}^2,\mathrm{A}^3) \text{ est liée.}}$

---

[3] Ça n'a rien de surprenant puisque les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

3.ii. On applique la méthode du pivot. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}L_1$ donnent que A a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{2}L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. La matrice A a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire 2.

Par ailleurs, la matrice A n'est pas semblable à J car ces deux matrices n'ont pas la même trace.

3.iii. Le polynôme $R = X^3 - 4X$ convient, comme on l'a vu en **3.i**. Le spectre de A est donc contenu dans $\{0, 2, -2\}$.

Comme A est de rang 2, on sait déjà que 0 est une valeur propre de A et que son espace propre $E_0(A)$ est de dimension 2 d'après la formule du rang.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. La dimension de chaque espace propre est donc égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. En particulier, on obtient l'égalité $\dim(E_2(A)) + \dim(E_{-2}(A)) = 2$.

Comme la trace de A est nulle, on trouve aussi $2\dim(E_2(A)) - 2\dim(E_{-2}(A)) = 0$, ce qui donne finalement $\dim(E_2(A)) = \dim(E_{-2}(A)) = 1$.

$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}.}$

3.iv. On a déjà justifié que A est diagonalisable et on a trouvé la dimension de ses espaces propres. Il existe une matrice S de $GL_4(\mathbb{R})$ qui vérifie l'égalité

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(0, 0, 2, -2).$$

On cherche à écrire la matrice A comme une combinaison linéaire de matrices de projections. Pour la matrice diagonale obtenue, une telle décomposition s'obtient directement :

$$\mathrm{diag}(0, 0, 2, -2) = 2\ \mathrm{diag}(0, 0, 1, 0) - 2\ \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1).$$

Posons donc $U = S \times \mathrm{diag}(0, 0, 1, 0) \times S^{-1}$ et $V = S \times \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1) \times S^{-1}$. On obtient alors les relations

$$U^2 = U, \quad V^2 = V, \quad A = 2U - 2V.$$

On trouve aussi

$$U \times V = S \times \mathrm{diag}(0, 0, 1, 0) \times S^{-1} \times S \times \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1) \times S^{-1} = S \times \mathrm{diag}(0, 0, 1, 0) \times \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1) \times S^{-1} = S \times \mathrm{diag}(0, 0, 0, 0) \times S^{-1} = 0$$

et $V \times U = 0$ par un calcul similaire.

Posons enfin $W = I - U - V$. On trouve $W = S \times \mathrm{diag}(1, 1, 0, 0) \times S^{-1}$ puis $W^2 = W$ et $WU = WV = VW = UW = 0$.

3.v. La relation $A^3 = 4A$ permet d'obtenir, par une récurrence facile, les relations

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad A^{2p+1} = 4^p A, \qquad A^{2p} = 4^{p-1}A^2.$$

Une autre méthode consiste à partir de la relation $A = 2U - 2V$, à remarquer qu'on peut appliquer la formule du binôme car U et V commutent. Prenons n dans $\mathbb{N}^*$.

$$A^n = 2^n(U - V)^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k U^{n-k} V^k.$$

On remarque ensuite que le produit $\mathrm{U}^{n-k}\mathrm{V}^k$ est nul dès que k et $n-k$ sont tous deux strictement positifs, c'est-à-dire dès que k est compris entre 1 et $n-1$. Il reste donc deux termes dans la somme.

$$\mathrm{A}^n = 2^n(\mathrm{U}^n + (-1)^n\mathrm{V}^n).$$

Ensuite, les relations $\mathrm{U}^2 = \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}^2 = \mathrm{V}$ permettent de montrer que les suites $(\mathrm{U}^n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{V}^n)_{n\geqslant 1}$ sont constantes, ce qui donne finalement

$$\mathrm{A}^n = 2^n(\mathrm{U} + (-1)^n\mathrm{V}).$$

En particulier, si n est impair, on trouve $\mathrm{A}^n = 2^n(\mathrm{U}-\mathrm{V}) = 2^{n-1}\mathrm{A}$ et si n est pair, on trouve $\mathrm{A}^n = 2^n(\mathrm{U}+\mathrm{V}) = 2^{n-2}\mathrm{A}^2$, ce qui corrobore les formules obtenues par la précédente méthode.

3.vi. On vérifie rapidement que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$ est un endomorphisme de E. L'ensemble C est alors son noyau, ce qui en fait un sous-espace vectoriel de E.

Prenons une matrice M de E et notons $\mathrm{N} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{MS}$. Un calcul direct donne $\mathrm{AM} - \mathrm{MA} = \mathrm{S}(\mathrm{diag}(0,0,2,-2) \times \mathrm{N} - \mathrm{N} \times \mathrm{diag}(0,0,2,-2))\mathrm{S}^{-1}$.

On voit donc que M est dans C si, et seulement si, la matrice N commute avec la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,0,2,-2)$. Mieux, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{MS}$ est un isomorphisme de C sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices qui commutent avec $\mathrm{diag}(0,0,2,-2)$.

Un calcul peu enthousiasmant mais direct prouve que les matrices qui commutent avec la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,0,2,-2)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$. Si l'on note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on remarque alors que $\mathcal{D}$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{3,3}, \mathrm{E}_{4,4})$. Cette famille étant extraite de la base canonique de E, c'est une famille libre. C'est donc une base de $\mathcal{D}$. On en déduit que $\mathcal{D}$ est de dimension 6.

Comme C est isomorphe à $\mathcal{D}$, on conclut que $\boxed{\text{le sous-espace C de E est de dimension 6.}}$

3.vii. Supposons qu'il existe une matrice M dans E qui vérifie l'égalité $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$. Dans ce cas, on remarque les égalités $\mathrm{AM} = \mathrm{M}^3 = \mathrm{MA}$, si bien que M appartient à l'ensemble C de la question précédente.

Posons à nouveau $\mathrm{N} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{MS}$. On obtient alors $\mathrm{N}^2 = \mathrm{diag}(0,0,2,-2)$ et N est la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$, où a, b, e, f, k, p sont six paramètres réels.

En élevant N au carré, on trouve que les deux derniers coefficients diagonaux sont k^2 et p^2. En particulier, l'égalité $\mathrm{N}^2 = \mathrm{diag}(0,0,2,-2)$ donne $p^2 = -2$, ce qui est impossible puisque p est réel.

$\boxed{\text{Cette impossibilité prouve qu'une telle matrice n'existe pas.}}$

EXERCICE 2

1.i. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, on remarque que e^{-t^2} est négligeable devant e^{-t} quand t tend vers $+\infty$. Enfin, on sait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le critère de domination, on en déduit que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En particulier, le nombre a est bien défini.

La fonction $t \mapsto t^2$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ donc il est légitime d'effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans l'intégrale a (ou plutôt $t = \sqrt{u}$, ce qui revient au même). On trouve alors

$$a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$$

et le théorème de changement de variable donne au passage l'existence de la deuxième intégrale.

On a montré que $\boxed{a \text{ et } b \text{ existent et vérifient l'égalité } a = b/2.}$

1.ii. Définissons une fonction $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

On va vérifier les trois points suivants :

1. pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
2. pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
3. il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ qui vérifie la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Le premier point est connu. Pour le deuxième point, la continuité est connue et l'intégrabilité est une conséquence de la domination que l'on justifie au troisième point. Pour le troisième point, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ convient.

La vérification de ces trois points permet d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, qui justifie que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $\mathrm{X} > 0$, on trouve $\int_0^{\mathrm{X}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(\mathrm{X})$. En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient finalement $\boxed{\mathrm{F}(0) = \pi/2.}$

1.iii. On va vérifier les trois points suivants :

1. pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
2. pour tout x dans $]0,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$;
3. pour tout segment $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$, il existe une fonction $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable qui vérifie la domination $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$.

Le premier point est connu. De plus, pour chaque t positif, la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$.

Soit $x > 0$. Le fait que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ a déjà été vu à la question précédente. La continuité de la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est connue. Son intégrabilité est une conséquence de la domination du troisième point.

Prenons maintenant a et b réels avec $0 < a < b$. On peut alors écrire

$$\forall x \in [a,b], \qquad \forall t \in [0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at^2}.$$

La fonction $\psi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at^2}$ est alors continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (l'intégrabilité se justifie comme pour la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$).

Les trois points annoncés ont été vérifiés. Ils permettent d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale, qui permet de conclure que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On trouve en particulier

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t.$$

Prenons x dans $]0,+\infty[$. Effectuons le changement de variable $t \mapsto t\sqrt{x} = s$ (c'est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,+\infty[$ sur lui-même).

$$\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x}} = -\frac{a}{\sqrt{x}}.$$

En multipliant par e^{-x}, on obtient alors l'identité

$$\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x)) = -a\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}},$$

qui est valable pour tout $x > 0$.

1.iv. Soit $x > 0$. On majore $\frac{1}{1+t^2}$ par 1 pour tout $t \geqslant 0$, ce qui donne

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\ \mathrm{d}t = \frac{a}{\sqrt{x}},$$

la dernière égalité ayant été obtenue à la question précédente.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\boxed{\text{la fonction F possède une limite nulle en } +\infty.}$

1.v. Dans l'identité de la question **1.iii**, on reconnaît la dérivée[4] de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x)$. Il existe donc une constante C qui vérifie l'identité

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) = \mathrm{C} - a\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

Faisons tendre x vers $+\infty$ en utilisant le résultat de la question précédente (il aurait en fait suffi de remarquer que la fonction F est bornée pour effectuer ce passage à la limite) :

$$0 = \mathrm{C} - a\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

En reportant dans l'identité précédente, il reste

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) = a\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t - a\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = a\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

Comme F est continue en 0, en faisant tendre x vers 0, on obtient alors $\mathrm{F}(0) = ab$, c'est-à-dire $\pi/2 = b^2/2$, ce qui donne finalement $\boxed{b = \sqrt{\pi}}$ et $\boxed{a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.}$

2.i. La fonction G est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Cette dernière étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour G.

Soit maintenant x dans $\mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $u = -t$ dans l'expression de $\mathrm{G}(-x)$:

$$\mathrm{G}(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}(-\ \mathrm{d}u) = -\mathrm{G}(x).$$

$\boxed{\text{La fonction G est donc impaire.}}$

2.ii. La fonction G' s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Ce développement en série entière est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier donc le rayon de convergence est infini.

On sait que lorsqu'une fonction est développable en série entière sur un intervalle ouvert, toutes ses primitives le sont aussi sur ce même intervalle, avec un développement qui s'obtient en intégrant terme à terme. La fonction G est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, son développement s'écrit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.}$$

Cette formule fournit d'ailleurs une nouvelle démonstration du fait que la fonction G est impaire.

---

[4] En nous donnant cette relation sous cette forme plutôt que sous la forme de l'équation différentielle $\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) = -a/\sqrt{x}$, l'auteur de cet exercice nous épargne le recours à la méthode de « variation de la constante ».

2.iii. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est développable en série entière, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}.$$

Comme les développements en série entière concernés sont valables avec un rayon de convergence infini, toutes les séries écrites convergent absolument pour tout x réel. Il est donc possible d'appliquer le théorème sur le produit de Cauchy au produit $\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{G}(x)$.

Pour cela, cependant, il est plus pratique d'écrire les développements sous la forme

$$\mathrm{G}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} g_p x^p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} h_p x^p.$$

Une telle écriture s'obtient en posant, pour tout entier k,

$$g_{2k} = 0, \quad g_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}, \qquad\qquad h_{2k} = \frac{1}{k!}, \quad h_{2k+1} = 0.$$

On obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{G}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p x^p,$$

où l'on a posé

$$\forall p \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_p = \sum_{q=0}^{p} g_q h_{p-q}.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{G}(x)$ est impaire donc α_p est nul pour tout indice p pair. Exprimons α_p dans le cas où p est un entier impair.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2k+1} = \sum_{q=0}^{2k+1} g_q h_{2k+1-q}.$$

Dans cette somme, tous les termes d'indices pairs sont nuls. Il reste

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2k+1} = \sum_{r=0}^{k} g_{2r+1} h_{2k-2r} = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^r}{r!(2r+1)} \times \frac{1}{(k-r)!}.$$

En notant u_k le coefficient α_{2k+1}, on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{H}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k+1}.$$

2.iv. En dérivant, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{H}'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{G}(x) + \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{G}'(x) = 2x\mathrm{H}(x) + 1.$$

Comme la fonction H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, sa dérivée l'est aussi et son développement s'obtient en dérivant terme à terme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{H}'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) u_k x^{2k}.$$

Avec un glissement d'indice ($j = k+1$), on trouve aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2x\mathrm{H}(x) + 1 = 1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k+2} = 1 + 2\sum_{j=1}^{+\infty} u_{j-1} x^{2j}.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction H', on obtient

$$u_0 = 1, \qquad \forall j \geqslant 1, \quad (2j+1)u_j = 2u_{j-1}.$$

En itérant cette relation de récurrence, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on trouve

$$u_k = \frac{2}{2k+1}u_{k-1} = \frac{2}{2k+1} \times \frac{2}{2k-1}u_{k-2} = \cdots = \frac{2}{2k+1} \times \frac{2}{2k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}u_0 = \frac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5 \cdot 3}.$$

Classiquement, on fait apparaître une factorielle au dénominateur en insérant les facteurs pairs manquants.

$$u_k = \frac{2^k \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2k)}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}k!}{(2k+1)!}.$$

Cette formule est valable pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et même pour tout k dans $\mathbb{N}$ (on remarque qu'elle convient aussi pour $k = 0$).

3.i. L'existence de $\Phi(x)$ pour tout x réel se prouve de la même façon que l'existence de a dans la première question de cet exercice. On trouve d'ailleurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = a - \mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \mathrm{G}(x).$$

Puisque G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que Φ aussi.
De plus, pour tout x réel, on trouve $\Phi'(x) = -\mathrm{G}'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$.

3.ii. On sait que $\mathrm{G}(x)$ tend vers a quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $\Phi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

On trouve d'autre part que $\Phi(x)$ tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $-\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est paire, cette limite vaut en fait $2a$, c'est-à-dire $\sqrt{\pi}$.

3.iii. Prenons $x > 0$ et $\mathrm{B} > 0$. On intègre par parties (on dérive $u \mapsto 1/\sqrt{u}$ en $u \mapsto -1/(2u\sqrt{u})$ et on intègre $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ en $u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$).

$$\int_{x^2}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}\int_{x^2}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{1}{2}\int_{x^2}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

On sait que $\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}/\sqrt{\mathrm{B}}$ tend vers 0 quand B tend vers $+\infty$. On remarque aussi que la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}/(u\sqrt{u})$ est intégrable sur $[x^2, +\infty[$ (elle est continue sur cet intervalle et négligeable devant $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ en $+\infty$).
En faisant tendre B vers $+\infty$, on obtient donc

$$\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

3.iv. Je ne commenterai pas la syntaxe bizarre de la question. Pour commencer, remarquons que le même changement de variable que celui utilisé à la première question de cet exercice donne

$$\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Avec la formule de la question précédente, on arrive à

$$\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right).$$

Prenons x dans $]0, +\infty[$. Pour tout u dans $[x^2, +\infty[$, on peut écrire

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x^3}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leqslant \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x^3}\int_{x^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}.$$

Cet encadrement prouve que le reste intégral $\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est négligeable devant e^{-x^2}/x quand x tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\boxed{\Phi(x) \text{ est équivalent à } \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$

3.v. Prenons $\mathrm{B} > 0$. Dans l'intégrale $\int_0^{\mathrm{B}} \Phi(x)\ \mathrm{d}x$, effectuons une intégration par parties (on dérive Φ et on intègre $x \mapsto 1$ en $x \mapsto x$).

$$\int_0^{\mathrm{A}} \Phi(x)\ \mathrm{d}x = \Phi(\mathrm{A})\mathrm{A} + \int_0^{\mathrm{A}} x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \Phi(\mathrm{A})\mathrm{A} + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{\mathrm{A}} = \Phi(\mathrm{A})\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^2} + \frac{1}{2}.$$

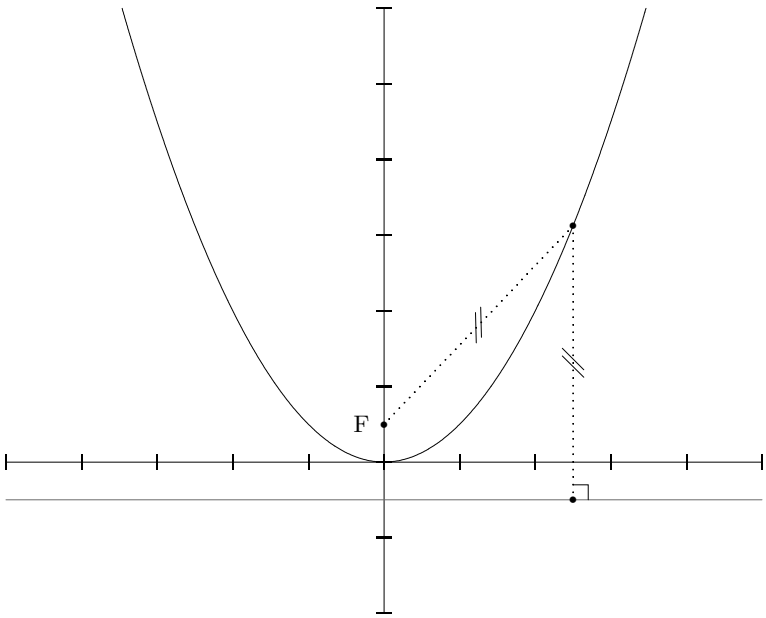
On sait que $\Phi(\mathrm{A})\mathrm{A}$ est équivalent à $\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^2}/2$ quand A tend vers $+\infty$. En particulier, ce terme tend vers 0.

Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$, on trouve que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \Phi(x)\ \mathrm{d}x \text{ existe et vaut } 1/2.}$

EXERCICE 3

1.i. La conique $\mathcal{P}$ est une parabole. Son foyer est le point $\mathrm{F}(0, 1/2)$. Sa directrice est la droite horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = -1/2$.

Cette conique est l'ensemble des points équidistants du foyer F et de la droite $\mathcal{D}$.



1.ii. Les choix de notation sont discutables. Classiquement, on a envie d'écrire une équation de droite en prenant x et y pour inconnues. Dans ces conditions, il n'est pas très habile d'avoir donné un autre rôle à x.

Je décide donc de prendre une autre notation que x, mettons x_0, et de remplacer le point M_x par le point M_{x_0}.

La parabole $\mathcal{P}$ peut être paramétrée par $t \mapsto (t, t^2/2)$, ce qui donne le vecteur vitesse $(1, t)$ au point de paramètre t pour tout t réel.

En particulier, la tangente $\mathcal{T}_{x_0}$ admet le vecteur $(1, x_0)$ pour vecteur directeur. Elle admet donc l'équation

$$x_0(x - x_0) - (y - x_0^2) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_0 x - y = x_0^2/2.$$

La droite $\mathcal{N}_{x_0}$, appelée *normale* à $\mathcal{P}$ au point M_{x_0}, admet pour équation

$$(x - x_0) + x_0(y - x_0^2/2) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x + x_0 y = x_0 + \frac{x_0^3}{2}.$$

1.iii. Dans cette question aussi, je remplace x par x_0.

Les droites D_{x_0} et $\mathcal{N}_x$ passent toutes deux par le point M_{x_0}. Il en va donc de même pour la droite Δ_{x_0}. Connaissant un point de cette droite, il suffit maintenant d'en trouver un vecteur directeur.

La droite D_{x_0} est dirigée par le vecteur $\mathbf{j}$ de la base canonique. La droite $\mathcal{N}_{x_0}$ est dirigée par le vecteur $\mathbf{u_0} = x_0\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

La droite Δ_{x_0} est dirigée par le vecteur $\mathbf{v_0}$ obtenu par réflexion du vecteur $\mathbf{j}$ par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\mathbf{u_0}$.

On sait que le vecteur $\mathbf{v_0}$ s'écrit

$$\mathbf{v_0} = 2p(\mathbf{j}) - \mathbf{j},$$

où p désigne la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\mathbf{u_0}$. On trouve donc

$$\mathbf{v_0} = 2\frac{(\mathbf{j}|\mathbf{u_0})}{(\mathbf{u_0}|\mathbf{u_0})}\mathbf{u_0} - \mathbf{j} = -\frac{2}{1+x_0^2}(x_0\mathbf{i} - \mathbf{j}) - \mathbf{j} = -\frac{2x_0}{1+x_0^2}\mathbf{i} + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2}\mathbf{j}.$$

Pour simplifier, on peut prendre pour vecteur directeur de la droite Δ_{x_0} le vecteur $-2x_0\mathbf{i} + (1-x_0^2)\mathbf{j}$. Cette droite admet donc l'équation suivante

$$(1-x_0^2)(x-x_0) + 2x_0(y - \frac{x_0^2}{2}) = 0.$$

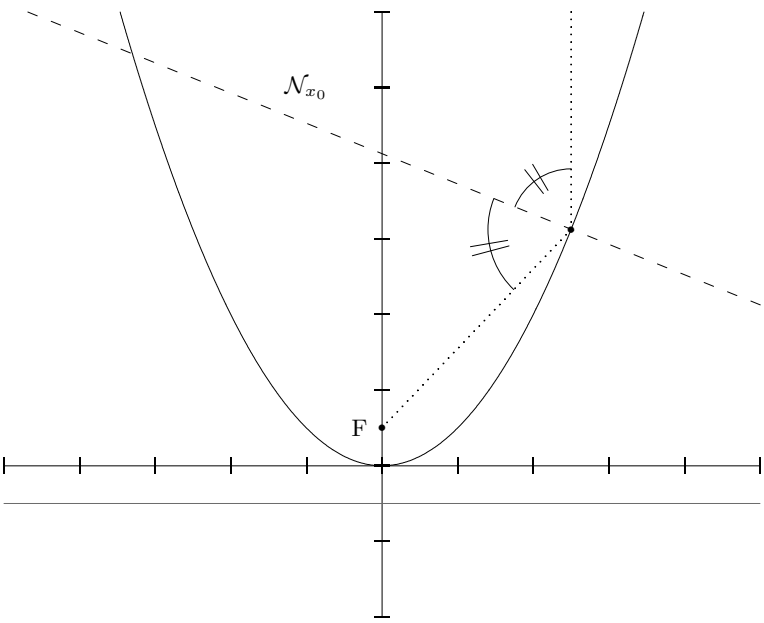
Dans le cas où x_0 est nul, on remarque que cette équation s'écrit $x = 0$. La droite en question est l'axe des ordonnées δ. L'intersection avec δ n'est donc pas réduite à un point. On va donc ajouter l'hypothèse $x_0 \neq 0$ pour répondre à la question.

Le paramètre x_0 n'étant pas nul, le vecteur $-2x_0\mathbf{i} + (1-x_0^2)\mathbf{j}$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{j}$. Les droites δ et Δ_{x_0} sont donc sécantes. Leur pont d'intersection a une abscisse nulle et son ordonnée est donnée par

$$-x_0(1-x_0^2) + 2x_0(y - \frac{x_0^2}{2}) = 0,$$

c'est-à-dire $y = 1/2$ après simplifications. $\boxed{\text{Le point d'intersection des droites } \delta \text{ et } \Delta_{x_0} \text{ est le foyer F.}}$

Le résultat que l'on vient de démontrer est une propriété bien connue en optique : étant donné un miroir parabolique, tout rayon lumineux issu du foyer se reflète en partant à l'infini, c'est-à-dire dans une direction parallèle à l'axe de la parabole.



2.i. La transformation R_θ est linéaire. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\tilde{\mathrm{R}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta). \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne ${}^t\tilde{\mathrm{R}}_\theta \times \tilde{\mathrm{R}}_\theta = \mathrm{I}_3$, ce qui prouve que R_θ est une isométrie. Un autre calcul montre que R_θ a un déterminant égal à 1. C'est donc une rotation.

On peut être plus précis. En effet, la droite $\mathrm{Vect}(\mathbf{j})$ est une direction propre de cette rotation pour la valeur propre 1 : c'est son axe de rotation. Le plan orthogonal à cette droite est le plan $\mathrm{Vect}(\mathbf{i}, \mathbf{k})$. Il est stable par cette rotation.

Si on munit ce plan de l'orientation définie par le vecteur normal $\mathbf{j}$, le couple $(\mathbf{k}, \mathbf{i})$ est une base orthonormale directe de ce plan et la restriction de R_θ à ce plan admet pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans cette base.

L'endomorphisme R_θ de $\mathbb{R}^3$ est donc la rotation d'angle θ d'axe $\mathrm{Vect}(\mathbf{j})$ dirigé par le vecteur $\mathbf{j}$.

2.ii. Là encore, je remplace x par x_0 afin de garder la lettre x pour désigner l'abscisse inconnue dans les équations cartésiennes classiques.

L'ensemble Γ_{x_0} est la trajectoire d'un point qui subit une révolution autour de l'axe $(\mathrm{O}y)$. C'est donc un cercle qui admet cette droite pour axe. Ce cercle est situé dans un plan orthogonal à cet axe, qui a donc pour équation $y = x_0^2/2$. Le centre de ce cercle est le point $(0, x_0^2/2, 0)$. Le rayon de ce cercle est la distance de ce point au point M_{x_0}, c'est-à-dire $|x_0|$.

L'ensemble Γ_{x_0} est donc défini par les équations $x^2 + z^2 = x_0^2$ et $y = x_0^2/2$.

2.iii. Soit $\mathrm{M} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On traduit l'appartenance à S par la suite d'équivalences que voici.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathrm{S} \quad &\iff \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = x_0^2 \\ y = \dfrac{x_0^2}{2} \end{cases} \\
&\iff \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y \\ y = \dfrac{x_0^2}{2} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\
&\iff \quad x^2 + z^2 = 2y.
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation d'un $\boxed{\text{paraboloïde de révolution}}$, ce qui n'est pas surprenant, dans la mesure où on l'a obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie.

2.iv. Soit $\mathrm{M} = (x, y, z)$ un point de S. Les coordonnées de M vérifient la relation $y = \frac{x^2+z^2}{2}$, ce qui prouve que M est un point de Σ.

Réciproquement, si (x, y, z) est un point de Σ, alors la coordonnée y vaut $\frac{x^2+z^2}{2}$, ce qui donne $2y = x^2 + z^2$ et prouve que ce point est sur S.

Par double inclusion, les surfaces S et Σ sont égales.

Prenons maintenant un élément de la surface Φ. Il est de la forme $\mathrm{G}(r, \theta)$ pour un certain (r, θ) de $\mathbb{R}^2$. Un calcul direct montre que ses coordonnées vérifient l'équation de S trouvée à la question précédente. Ça prouve l'inclusion de Φ dans S.

Soit maintenant un point $\mathrm{M} = (x, y, z)$ de S. La relation $2y = x^2 + z^2$ montre que y est positif. On peut donc poser $r = \sqrt{2y} = \sqrt{x^2 + z^2}$, afin d'avoir $y = r^2/2$.

Comme r est le module du nombre complexe $z + \mathrm{i}x$, il existe θ réel vérifiant l'égalité $z + \mathrm{i}x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, c'est-à-dire $z = r\cos(\theta)$ et $x = r\sin(\theta)$. Le point M est donc un élément de Φ.

On a prouvé l'inclusion de S dans Φ. Par double inclusion, les surfaces S et Φ sont égales.

$\boxed{\mathrm{S} = \Sigma = \Phi.}$

2.v. La matrice différentielle de F au point (x_0, z_0) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 donc le point A_0 est régulier pour le paramétrage F de la surface Σ et le plan tangent admet pour vecteur normal le produit vectoriel des vecteurs écrits en colonne dans cette matrice. Ce produit vectoriel vaut $(x_0, -1, z_0)$. Le plan tangent demandé admet donc l'équation

$$x_0(x - x_0) - (y - \frac{x_0^2 + z_0^2}{2}) + z_0(z - z_0) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_0 x - y + z_0 z = \frac{x_0^2 + z_0^2}{2}.$$

On nous demande à quelle condition ce plan tangent admet une équation de la forme $y = c$ pour une certain constante c. Cela équivaut à ce que ce plan tangent admette pour vecteur normal le vecteur $\mathbf{j}$. Cela équivaut donc à la condition $x_0 = y_0 = 0$.

Géométriquement, cela signifie simplement que le seul plan tangent au paraboloïde qui soit orthogonal à l'axe de révolution est le plan tangent au sommet.

3.i. La courbe C_1 est une parabole définie par les équations $z = 0$ et $x^2 = 2y$. En se basant sur les calculs de la question **1.ii**, on trouve que la tangente à cette courbe au point $P = (x_0, x_0^2/2, 0)$ est définie par les équations $z = 0$ et $y - x_0 x = -x_0^2/2$.

En particulier, cette tangente coupe la droite Δ au point $A_1 = (0, -x_0^2/2, 0)$.

3.ii. De la même façon, la courbe C_2 est une parabole définie par les équations $x = 0$ et $y^2 = 2z$. La tangente à cette courbe au point $Q = (0, y_0, y_0^2)$ est définie par les équations $x = 0$ et $z - y_0 y = -y_0^2/2$.

En particulier, cette tangente coupe la droite Δ au point $A_2 = (0, y_0/2, 0)$.

L'égalité $A_1 = A_2$ équivaut à $y_0 = -x_0^2$.

3.iii. La surface σ est la réunion des droites de la forme (PQ), où P et Q sont respectivement les points $(x_0, x_0^2/2, 0)$ et $(0, -x_0^2, x_0^4/2)$, où le paramètre x_0 varie dans $\mathbb{R}^*$.

Pour un x_0 fixé, la droite (PQ) admet le paramétrage barycentrique

$$t \mapsto (tx_0, t\frac{x_0^2}{2} + (1-t)(-x_0^2), (1-t)\frac{x_0^4}{2}).$$

La surface σ admet donc le paramétrage suivant

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_0, t) & \mapsto & (tx_0, \frac{3t-2}{2}x_0^2, \frac{1-t}{2}x_0^4). \end{array}$$

Je ne reproduis pas ici une représentation de cette surface, qui serait peut parlante. J'invite le lecteur ou la lectrice à la visualiser avec un logiciel dynamique.

3.iv. Pour tout (x_0, t) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la matrice différentielle de H en (x_0, t) s'écrit

$$\begin{pmatrix} t & x_0 \\ (3t-2)x_0 & \frac{3}{2}x_0^2 \\ 2(1-t)x_0^3 & -\frac{x_0^4}{2} \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel des vecteurs écrits en colonne est (après calculs) le vecteur

$$\left(\frac{3t-4}{2}x_0^5, \frac{-3t+4}{2}x_0^4, \frac{-3t+4}{2}x_0^2\right).$$

Comme x_0 est non nul, une condition nécessaire est suffisante pour que ce vecteur soit non nul est que t soit différent de $4/3$.

Ainsi, pour tout (x_0, t) de $\mathbb{R}^2$ avec $x_0 \neq 0$ et $t \neq 4/3$, le point $H(x_0, t)$ est un point régulier de la surface σ et le plan tangent en ce point admet pour vecteur normal le vecteur ci-dessus. Ce vecteur est colinéaire au vecteur $(x_0^3, -x_0^2, -1)$, qui ne dépend que de x_0.

Ainsi, quand x_0 est fixé et que t varie (auquel cas le point $H(x_0, t)$ décrit une droite génératrice, privée toutefois du point de paramètre $t = 4/3$), le plan tangent à σ au point $H(x_0, t)$ a une direction fixée : la direction orthogonale au vecteur $(x_0^3, -x_0^2, -1)$.