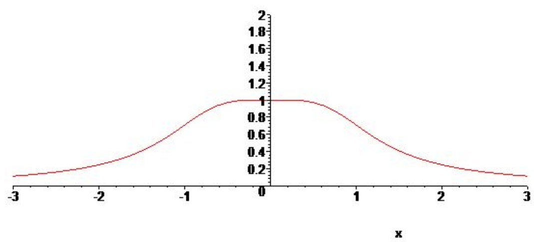
Corrigé de E3A 2011 PC math A

Partie I

1. (a) f est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$.



(b) $f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$ et $f''(x) = -6x^2(1+x^4)^{-3/2} - 2x^3 \times (-3/2) \times 4x^3(1+x^4)^{-5/2} = 6x^2(x^4-1)(1+x^4)^{-5/2}$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \pm 1$: il y a donc deux points d'inflexion de coordonnées $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$.

(c) D'après le cours, $(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{(-1/2)\times(-3/2)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)$ d'où l'on déduit en posant $t = x^4$: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$.

(d) Puisque f est de classe C^∞ elle possède un DL à l'ordre 8 donné par la formule de Taylor-Young: $f(x) = \sum_{k=0}^{8} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^8)$. Par unicité des coefficients d'un DL on en déduit que $f^{(4)}(0) = -12$, $f^{(8)}(0) = 3 \times 7! = 15120$ et $f^{(k)}(0) = 0$ si k n'est pas multiple de 4.

2. (a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante.

(b) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geqslant 0$.

(c) Immédiat puisque $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(d) Posons $u_n = |a_n z^n|$. Pour $z \neq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}|z|$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$. La règle de d'Alembert entraine que la série $(\sum u_n)$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Par suite le rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$ est égal à 1.

3. (a) F est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ (toute fonction continue sur I possède une unique primitive s'annulant en un point a de I).

(b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive et $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. L'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ entraine l'existence de α.

(c) On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ qui est bien une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = \int_1^0 \frac{-du}{u^2\sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$.

(d) La relation de Chasles donne bien $\alpha = 2F(1)$.

(e) i. $f(n) \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge par la règle de Riemann.

ii. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$ d'où $\sum_{n=0}^{N} f(n+1) \leqslant \int_0^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n)$ et en faisant tendre N vers $+\infty$: $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ que l'on peut réécrire puisque $f(0)=1$: $\alpha \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant \alpha + 1$.

Partie II

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$.

2. En posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ on obtient $I_n = \int_{\pi/2}^{0} (\sin u)^n \times (-du) = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n du$.

3. Puisque $\cos t \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$ on a $I_n \geqslant 0$. De plus $I_n = 0$ entrainerait que $\cos t = 0$ sur $[0, \pi/2]$ (cos est continue) ce qui est faux; donc $I_n > 0$.

4. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\cos t - 1)dt \leqslant 0$ car $\cos t \leqslant 1$. La suite (I_n) est donc décroissante, minorée par 0 par suite elle converge.

5. Intégrons par parties pour $n \geqslant 2$: $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n-1}dt = \left[(\sin t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t) \times (-(n-1)\sin t)(\cos t)^{n-2}dt = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2)(\cos t)^{n-2}dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. On en déduit $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

6. $u_n = (n+1)I_{n+1} \times I_n = nI_{n-1}I_n = u_{n-1}$: la suite (u_n) est donc constante d'où $u_n = u_0 = I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

7.
   - $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ donc la suite $\dfrac{I_{2n}}{a_n}$ est constante et égale à sa valeur en 0: $\frac{\pi}{2}$.
   - $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1}$ et $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$ d'où $\dfrac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{2n-1}\dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n-1}{2n} = 1$. La suite $(2n+1)I_{2n+1}a_n$ est donc constante et égale à sa valeur en 0: 1.

8. (a) Immédiat puisque la suite (I_n) est décroissante et $I_n > 0$.

   (b) $\dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ a pour limite 1 donc par le théorème d'encadrement $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ aussi. $nI_n^2 = nI_nI_{n-1} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}}$ a donc pour limite $\dfrac{\pi}{2}$.

   (c) On en déduit $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

9. (a) De $nI_n^2 \leqslant nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ on tire $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. On en déduit $a_n = \dfrac{2}{\pi}I_{2n} \leqslant \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

   Puis $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} \geqslant \dfrac{1}{2n+1}\sqrt{\dfrac{2(2n+1)}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$.

   (b) $a_n = \dfrac{2}{\pi}I_{2n} \sim \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

   (c) i) $a_n \sim \dfrac{C}{n^{1/2}}$ donc la série $(\sum a_n)$ diverge par la règle de Riemann.

   ii) $\dfrac{a_n}{4n+1} \sim \dfrac{C'}{n^{3/2}}$ donc la série $\left(\sum \dfrac{a_n}{4n+1}\right)$ converge par la règle de Riemann.

iii) La série $(\sum(-1)^n a_n)$ est alternée car $a_n > 0$. De plus, la suite (a_n) est décroissante et a pour limite 0 donc la série alternée converge.

iv) La série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right)$ est absolument convergente par le ii).

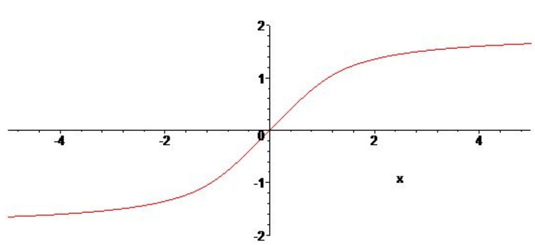
Partie III

1. (a) F est de classe C^∞ puisque sa dérivée f l'est aussi.
   (b) $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u) \times (-du)$ par le changement de variable $t = -u$. Puisque f est paire on a donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire.
   (d) De $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ on déduit en intégrant sur $[1, x]$: $F(x) - F(1) \leqslant \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \dfrac{1}{x}$.
   (e) Toute fonction croissante et majorée sur $[A, +\infty[$ possède une limite en $+\infty$.
   (f) F est croissante sur $[1, +\infty[$ et y est majorée par $F(1)+1$ donc elle possède une limite en $+\infty$.

2. (a) Puisque f est continue et possède un DL à l'ordre 8, on peut intégrer terme à terme ce DL pour obtenir le DL de F à l'ordre 9: $F(x) = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9)$ (car de plus $F(0) = 0$).
   (b) L'équation de la tangente en 0 est: $y = x$. Comme $F(x) - x \sim -\frac{1}{10}x^5$ quand x tend vers 0 on en déduit que pour $x > 0$ la courbe (C) est au dessous de T alors que pour $x < 0$ elle est au dessus de T.
   (c) $F''(x) = f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$; (C) a donc un unique point d'inflexion, le point O.

3. (a) Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne $F(x) - F(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_1^{1/x} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_{1/x}^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F(1) - F(1/x)$.
   (b) Puisque F est continue la limite en $+\infty$ de $F(1/x)$ est égale à $F(0) = 0$ donc la limite en $+\infty$ de $F(x)$ est égale à $2F(1)$.
   (c) On retrouve ainsi le résultat de la question I)3)d): $\alpha = 2F(1)$ (mais on a refait la même démonstration!).

4. La tangente à (C) au point d'abscisse 1 est: $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{2}} + F(1)$. Les droites d'équation $y = \alpha$ et $y = -\alpha$ sont asymptotes à (C).



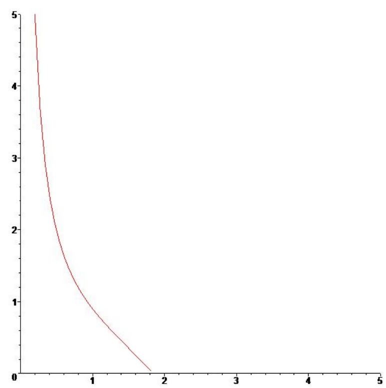
5. (a) (E) s'écrit $y' + \dfrac{2t^3}{1+t^4}y = \dfrac{1}{1+t^4}$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t^3}{1+t^4}$ est $\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^4)$. En multipliant l'équation par $e^{\varphi(t)} = \sqrt{1+t^4}$ on obtient: $(y\sqrt{1+t^4})' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ d'où $y\sqrt{1+t^4} = F(t) + C$ et donc $y = \dfrac{F(t)+C}{\sqrt{1+t^4}}$.

(b) i. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc la courbe possède O comme centre de symétrie et on peut se limiter à $t > 0$.

ii. Sur $]0, +\infty]$, x croît strictement de 0 à α alors que y décroît strictement de $+\infty$ à 0. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe.

iii. Quand t tend vers $+\infty$ on peut écrire avec la question III)3)a) en posant $u = \frac{1}{t}$: $x(t) = F(t) = \alpha - F(u) = \alpha - u + \frac{1}{10}u^5 + o(u^5)$ et $y(t) = u$. On en déduit qu'il y a un point limite de coordonnées $(\alpha, 0)$ et que la courbe y possède une tangente d'équation $y = \alpha - x$. On peut même dire que la courbe est au dessus de cette tangente puisque $x(t) > \alpha - y(t)$.

iv.



(c) i. $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.
Pour tout réel t on a $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f(xy) \leqslant 1$.
En intégrant $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ sur $[0, x]$ pour $x > 0$ on obtient $0 \leqslant F(x) \leqslant x$ d'où puisque F est impaire: $|F(x)| \leqslant |x|$ et donc $|F(xy)| \leqslant |xy|$.

ii. φ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ puisque F est continue sur $\mathbb{R}$; $|\varphi(x,y)| \leqslant |F(xy)| \leqslant |xy|$ montre que $\varphi(x,y)$ a pour limite 0 quand (x,y) tend vers (0,0). φ est donc continue en (0,0) donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

iii. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}F(xy) + \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}f(xy)$.
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}F(xy) + \dfrac{x^3}{x^2+y^2}f(xy)$.

iv. $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{2x^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant 3|y|$ et $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{2|x|^3y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{|x|^3}{x^2+y^2} \leqslant 3|x|$.
Les deux dérivées partielles ont donc pour limite 0 quand (x,y) tend vers (0,0). Puisque $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ et de même $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = 0$, on peut conclure que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Partie IV

1. (a) Posons $v_n = \left|\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^n\right|$. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{4n+1}{4n+5}|x|$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = |x|$.
La règle de d'Alembert entraine que la série $(\sum v_n)$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
Par suite le rayon de convergence de $\left(\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^n\right)$ est égal à 1.

(b) Pour $x = \pm 1$ on a $\left|\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^n\right| = \dfrac{a_n}{4n+1} \sim \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ donc la série converge absolument par la règle de Riemann: $h(1)$ et $h(-1)$ existent.

(c) Si la série entière a un rayon de convergence égal à R et si elle converge au point R alors la fonction somme est continue sur $[0, R]$. De même si elle converge au point $-R$ alors la fonction somme est continue sur $[-R, 0]$. C'est bien le cas ici avec $R = 1$ donc h est continue sur [-1,1].

(d) Pour $x \in [-1, 1]$ on a $\left|\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^n\right| \leqslant \dfrac{a_n}{4n+1}$ terme général d'une série convergente; il y a donc convergence normale sur [-1,1]. Le terme général de la série étant une fonction continue sur [-1,1] et la série convergeant normalement sur [-1,1] la somme de la série est continue sur [-1,1].

2. (a) $b(x) = (1+x)^\beta = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)}{n!} x^n$ valable pour tout x réel si $\beta \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1, 1[$ sinon.

(b) Avec $\beta = -\frac{1}{2}$ on en déduit pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)...(-2n+1)}{2^n n!} x^{4n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^{4n}$.

En intégrant (ce qui est possible sur]-1,1[) on obtient: $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1} = h(x)$.

(c) Comme F et h sont continues sur [-1,1] l'égalité $F(x) = h(x)$ s'étend à [-1,1].

(d) Pour $x = 1$ on obtient $\alpha = 2F(1) = 2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3. (a) La série est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées: la suite $b_n = a_n \times \dfrac{1}{4n+1}$ est décroissante (puisque (a_n) et $(\dfrac{1}{4n+1})$ le sont et sont positives) et tend vers 0. On a donc $\left|\dfrac{\alpha}{2} - S_p\right| \leqslant |b_{p+1}|$ donc $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.

(b) Avec le II)9)a) on déduit $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{2}{(4p+5)\sqrt{\pi(p+1)}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(p+1)^{3/2}}$.

(c) $2\sqrt{\pi}(p+1)^{3/2} \geqslant 10^6 \Leftrightarrow 4\pi(p+1)^3 \geqslant 10^{12} \Leftrightarrow p+1 \geqslant \frac{10^4}{(4\pi)^{1/3}}$. Sans calculatrice on peut prendre $p = 5000$ puisque $(4\pi)^{1/3} > 2$ (avec une calculatrice $p = 4300$ suffirait).

Remarque: une calculatrice donne instantanément $2F(1) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx 1.85407467730$ qui est une valeur approchée de α à 10^{-12} près.