10PC06

**Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE**

# Épreuve de Mathématiques A PC

**Durée 4 h**

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

**L'usage de calculatrices est interdit.**

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace.
Les parties I et II sont consacrées à la définition et à certaines propriétés de cette transformation. Les résultats de ces deux parties pourront être admis pour aborder la partie III. Enfin, la partie IV est totalement indépendante des parties II et III.

Dans tout ce problème, $E$ désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions $f$, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq Ct^n.$$

## Partie I : la transformation de Laplace

**1.** Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale impropre

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt.$$



TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

(a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ est convergente et que

$$I_0(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

*Indication :* le réel $T > 0$ étant donné, on pourra intégrer $\int_0^T t^n e^{-xt}dt$ par parties.

**2.** (a) Montrer que, muni des opérations usuelles, $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

(b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à $E$.

(c) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à $E$.

**3.** On se donne $f \in E$.

(a) Soit $x$ un réel strictement positif; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
On notera alors jusquà la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

(b) Énoncer le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

(c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

**4.** Montrer que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de $E$ dans l'espace constitué des applications définies et continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

## Partie II : quelques propriétés des transformées de Laplace

Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1. On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier $n$ tels que $|f(t)| \leq Ct^n$ pour tout réel $t \geq A$.

   (a) Montrer que
   $$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A \left|f(t)e^{-xt}\right| dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}$$
   pour tout réel $x > 0$.

   (b) Montrer que
   $$\int_0^A \left|f(t)e^{-xt}\right| dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   (c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

2. (a) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $C^1$ sur $[x_0, +\infty[$ en énonçant le théorème utilisé.

   (b) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et que
   $$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}dt$$
   pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

3. On suppose de plus que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $f' \in E$.

   (a) Montrer que
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$
   pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

   (b) Vérifier que la fonction $h : t \mapsto tf'(t)$ appartient à $E$ et montrer que
   $$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)$$
   pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

   (c) On suppose que $f$ est de classe $C^2$ sur $[0, +\infty[$ et que $f'' \in E$. Pour tout $x \in ]0, +\infty[$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de $x$, $\mathcal{L}(f)(x)$, $f(0)$ et $f'(0)$.

## Partie III : une application de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on se donne un entier $p \geq 1$ et on considère :

- le problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y''(t) - ty'(t) + 2py(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
  où $y$ désigne une fonction définie et de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles

– l'équation différentielle

$$(J) \quad xu'(x) + (x^2 + 2p + 1)u(x) = x,$$

où $u$ désigne une fonction définie et de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles.

**1.** Justifier que $(\mathcal{P})$ possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$, que l'on notera $Y$.

L'objectif de cette partie est d'expliciter $Y$ en passant par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Dans ce but, on note $f$ la restriction de $Y$ à l'intervalle $[0, +\infty[$ et *on admet que $f$, $f'$ et $f''$ appartiennent à $E$*. On note alors $U = \mathcal{L}(f)$.

**2.** À l'aide des résultats de la Partie II, montrer que $U$ est une solution de $(J)$ sur $]0, +\infty[$.

**3.** Pour tout entier $n \geq 0$, on note $f_n$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n+1}e^{\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier $n$ et tout réel $x$ une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

(b) En déduire que

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

pour tout entier $n$ et tout réel $x$.

**4.** (a) Donner une base de l'espace des solutions de l'équation sans second membre associée à $(J)$ sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que l'ensemble des solutions de $(J)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p! \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!} \frac{1}{x^{2k+1}},$$

où $C$ est un réel quelconque.

**5.** (a) Parmi les solutions ci-dessus, on désigne par $U_0$ celle correspondant à $C = 0$. Montrer, à l'aide des résultats de la Partie I, qu'il existe un polynôme $R$, dont on donnera les coefficients, tel que la restriction $R_0$ de $R$ à $[0, +\infty[$ vérifie $\mathcal{L}(R_0) = U_0$.

(b) Montrer que $R$ est la solution de $(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{R}$.

## Partie IV : injectivité de la transformation de Laplace

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

On se donne $f \in E$ et on considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s}ds.$$

**1.** Justifier que $g(t)$ possède une limite finie $L$ lorsque $t \to +\infty$.

**2.** En déduire que $g \in E$. *Indication :* on pourra utiliser I 2 (b).

**3.** (a) Montrer que $g' \in E$ et déduire de II 3 (a) que pour tout $x \in ]0, +\infty[$ :

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}dt.$$

(b) Soit $\varphi$ l'application définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{pour } u \in ]0, 1] \\ L & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

(i) Vérifier que $\varphi$ est continue sur $[0, 1]$.

(ii) Montrer après avoir énoncé le théorème de changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\varphi(u)du$$

pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

On suppose désormais que $\mathcal{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

**4.** Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 u^n\varphi(u)du = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

**5.** (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $u \mapsto \cos(p\pi u)$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \cos(p\pi u)\varphi(u)du = 0$ pour tout entier $p$ en citant avec précision le théorème utilisé.

(c) Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, périodique et de période 2 définie par $\psi(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in [0, 1]$.

(i) Vérifier que $\psi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Calculer ses coefficients de Fourier sous forme trigonométrique et en déduire, en citant le théorème utilisé, que $\psi$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

**6.** (a) Montrer que $f$ est la fonction nulle.

(b) Montrer que $\mathcal{L}$ est injective.



FIN DE L'EPREUVE