Corrigé de E3A 2010 PC math A

Partie I

1. (a) Pour $x>0$ on a $\displaystyle\int_0^T e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\left[-e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{x}(1-e^{-xT})$ d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

   (b) La propriété est vérifiée pour $n=0$. Supposons la vérifiée pour un entier $n-1$.
   $\displaystyle\int_0^T t^n e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\left[-t^n e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=T} + \frac{n}{x}\int_0^T t^{n-1}e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}T^n e^{-xT} + \frac{n}{x}\int_0^T t^{n-1}e^{-xt}dt.$
   Avec $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} T^n e^{-xT} = 0$ $(x>0)$ et l'hypothèse de récurrence on déduit:
   $\displaystyle I_n(x) = \frac{n}{x}I_{n-1}(x) = \frac{n}{x}\frac{(n-1)!}{x^n} = \frac{n!}{x^{n+1}}$. La propriété est donc vraie pour tout n.

2. (a) E est une partie non vide de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles. Si $f\in E$ on a $|f(t)|\leqslant Ct^n$ pour $t\geqslant A$ donc $|\alpha f(t)|\leqslant C|\alpha|t^n$ pour $t\geqslant A$. Si de plus $g\in E$ on a $|g(t)|\leqslant C't^{n'}$ pour $t\geqslant A'$. Pour $t\geqslant \max(A,A',1)$ on a alors $|f(t)+g(t)|\leqslant Ct^n + C't^{n'} \leqslant (C+C')t^{\max(n,n')}$ donc $f+g\in E$.

   (b) Si f est bornée alors $|f(t)|\leqslant C$ pour tout t donc $n=0$ convient.

   (c) Si $\displaystyle f(t)=\sum_{k=0}^n a_k t^k$ alors $\displaystyle\left|\frac{1}{t^n}f(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{t^{n-k}} \leqslant \sum_{k=0}^n |a_k| = C$ pour $t\geqslant 1$; on a bien $|f(t)|\leqslant Ct^n$.

3. (a) Si $f\in E$ alors f est continue et $|f(t)|\leqslant Ct^n$ pour $t\geqslant A$. On en déduit $|f(t)e^{-xt}|\leqslant Ct^n e^{-xt}$ qui est intégrable sur $[A,+\infty[$ d'après la question I1b (il n'y a pas de problème sur $[0,A]$).

   (b) Soit g telle que $x\mapsto g(x,t)$ soit continue sur I, que $t\mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J et qu'il existe φ intégrable sur J vérifiant $|g(x,t)|\leqslant\varphi(t)$ pour tout $(x,t)\in I\times J$ alors $\displaystyle G(x)=\int_J g(x,t)dt$ est continue sur I.

   (c) Pour $g(x,t)=f(t)e^{-xt}$, $J=[0,+\infty[$, $I=[x_0,+\infty[$ et $\varphi(t)=|f(t)|e^{-x_0 t}$ les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. $\mathcal{L}(f)$ est donc continue sur $I=[x_0,+\infty[$. Comme c'est vrai pour tout $x_0>0$ on en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

4. $\mathcal{L}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale. C'est donc bien une application linéaire de E dans l'ensemble des fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

Partie II

1. (a) $\displaystyle|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}|f(t)|e^{-xt}dt \leqslant \int_0^A |f(t)|e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} Ct^n e^{-xt}dt \leqslant \int_0^A |f(t)|e^{-xt}dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}$.

   (b) Puisque f est continue sur $[0,A]$ elle y est bornée: $|f(t)|\leqslant M$. Par suite, $\displaystyle\int_0^A |f(t)|e^{-xt}dt \leqslant M\int_0^A e^{-xt}dt \leqslant MI_0(x) = \frac{M}{x}$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

   (c) $\displaystyle|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \frac{M}{x} + C\frac{n!}{x^{n+1}}$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2. (a) Soit g telle que $x\mapsto g(x,t)$ soit de classe C^1 sur I, que $t\mapsto g(x,t)$ et $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ soient intégrables sur J et qu'il existe φ intégrable sur J vérifiant $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$ pour tout $(x,t)\in I\times J$ alors $\displaystyle G(x)=\int_J g(x,t)dt$ est de classe C^1 sur I et $\displaystyle G'(x)=\int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$.
   Pour $g(x,t)=f(t)e^{-xt}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt}$, $J=[0,+\infty[$, $I=[x_0,+\infty[$ et $\varphi(t)=|tf(t)|e^{-x_0t}$ les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées puisque si $f\in E$ alors $t\mapsto tf(t)$ est aussi dans E ($|tf(t)|\leqslant Ct^{n+1}$ pour $t\geqslant A$).

(b) On a donc $\mathcal{L}(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}dt$ pour tout $x \geqslant x_0$, donc pour tout $x > 0$ puisque $x_0 > 0$ est arbitraire.

3. (a) En intégrant par parties on obtient: $\int_0^T f'(t)e^{-xt}dt = [f(t)e^{-xt}]_{t=0}^{t=T} + x\int_0^T f(t)e^{-xt}dt = f(T)e^{-xT} - f(0) + x\int_0^T f(t)e^{-xt}dt$. Avec $|f(T)e^{-xT}| \leqslant CT^n e^{-xT}$ qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ on obtient $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

(b) Puique $f' \in E$ on a $|h(t)| = |tf'(t)| \leqslant Ct^{n+1}$ pour $t \geqslant A$, donc $h \in E$. En intégrant par parties on obtient: $\int_0^T f'(t)te^{-xt}dt = [f(t)te^{-xt}]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T f(t)e^{-xt}dt + x\int_0^T tf(t)e^{-xt}dt = Tf(T)e^{-xT} - \int_0^T f(t)e^{-xt}dt + x\int_0^T tf(t)e^{-xt}dt$. Avec $|Tf(T)e^{-xT}| \leqslant CT^{n+1}e^{-xT}$ qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ on obtient $\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x\mathcal{L}(f)'(x)$.

(c) Il suffit d'appliquer le résultat du II3a à f' puis à f: $\mathcal{L}(f'')(x) = x\mathcal{L}(f')(x) - f'(0) = x(x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)) - f'(0) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0)$.

Partie III

1. Le théorème de Cauchy s'applique puisque les fonctions $t \mapsto -t$ et $t \mapsto 2p$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que le coefficient de y'' ne s'annule pas. Il y a une unique solution, notée Y, qui vérifie la condition initiale $Y(0) = 1$ et $Y'(0) = 0$.

2. De $f''(t) - tf'(t) + 2pf(t) = 0$ on déduit par linéarité de $\mathcal{L}$ et en posant $h(t) = tf'(t)$: $\mathcal{L}(f'')(x) - \mathcal{L}(h)(x) + 2p\mathcal{L}(f)(x) = 0$ d'où $x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0) - (-\mathcal{L}(f)(x) - x\mathcal{L}(f)'(x)) + 2p\mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit encore avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$: $x\mathcal{L}(f)'(x) + (x^2 + 2p + 1)\mathcal{L}(f)(x) = x$. $U = \mathcal{L}(f)$ est donc bien solution de (J) sur $]0, +\infty[$.

3. (a) $f_{n+1}(x) = \int_0^x t^{2n+2}te^{\frac{t^2}{2}}dt = [t^{2n+2}e^{\frac{t^2}{2}}]_0^x - (2n+2)\int_0^x t^{2n+1}e^{\frac{t^2}{2}}dt = x^{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - 2(n+1)f_n(x)$.

(b) On en déduit $\dfrac{f_{n+1}(x)}{(-2)^{n+1}(n+1)!} = \dfrac{f_n(x)}{(-2)^n n!} + \dfrac{x^{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^{n+1}(n+1)!}$ d'où par récurrence: $\dfrac{f_n(x)}{(-2)^n n!} = f_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^{2k}e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^k k!}$. Avec $f_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ on obtient $\dfrac{f_n(x)}{(-2)^n n!} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^k k!}$ d'où $f_n(x) = -(-2)^n n! + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-2)^{n-k}n!x^{2k}e^{\frac{x^2}{2}}}{k!} = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-2)^k x^{2n-2k}}{(n-k)!}$ après avoir remplacé k par $n-k$.

4. (a) L'équation sans second membre associée à (J) s'écrit encore $u'(x) + \left(x + \dfrac{2p+1}{x}\right)u(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto x + \dfrac{2p+1}{x}$ est $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + (2p+1)\ln(x)$ et $e^{\varphi(x)} = x^{2p+1}e^{\frac{x^2}{2}}$. Par suite $(x^{2p+1}e^{\frac{x^2}{2}}u(x))' = (e^{\varphi(x)}u(x))' = 0$ donc une base de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation sans second membre associée à (J) est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$.

(b) Après avoir multiplié par $x^{2p}e^{\frac{x^2}{2}}$ (J) devient $(x^{2p+1}e^{\frac{x^2}{2}}u(x))' = x^{2p+1}e^{\frac{x^2}{2}}$ donc $x^{2p+1}e^{\frac{x^2}{2}}u(x) = f_p(x) + C' = p!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{p} \dfrac{(-2)^k x^{2p-2k}}{(p-k)!} + C$ d'où $u(x) = p!\sum_{k=0}^{p} \dfrac{(-2)^k}{x^{2k+1}(p-k)!} + C\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$.

5. (a) En utilisant le I1b on a: $U_0(x) = p!\sum_{k=0}^{p} \dfrac{(-2)^k}{x^{2k+1}(p-k)!} = p!\sum_{k=0}^{p} \dfrac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}\int_0^{+\infty} t^{2k}e^{-xt}dt = \mathcal{L}(R_0)(x)$ si R_0 est la restriction de $R(x) = p!\sum_{k=0}^{p} \dfrac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}x^{2k}$.

(b) En reprenant les calculs faits au III2, on obtient que $\mathcal{L}(R_0''-XR_0'+2pR_0)=0$ puisque $\mathcal{L}(R_0)$ est solution de (J) et qu'il vérifie de plus $R_0(0)=\frac{p!}{p!}=1$ et $R_0'(0)=0$. Or si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, $\mathcal{L}(P)(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{k!}{x^{k+1}}$ n'est la fonction nulle que si $P=0$ (c'est l'injectivité de la transformée de Laplace pour les polynômes). On en déduit que $R_0''-XR_0'+2pR_0=0$ et puisque de plus $R_0(0)=1$ et $R_0'(0)=0$, R est bien l'unique solution de (P).

On peut aussi montrer directement à partir des coefficients du polynôme R qu'il vérifie bien $R''-XR'+2pR=0$, $R(0)=1$ et $R'(0)=0$.

Partie IV

1. $L=\mathcal{L}(f)(1)$.

2. g est continue (c'est une primitive) et bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|g(t)|\leqslant\int_0^t|f(s)|e^{-s}ds\leqslant\int_0^{+\infty}|f(s)|e^{-s}ds$ qui existe car $s\mapsto f(s)e^{-s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (montré au I3a). Avec le I2b on déduit que $g\in E$.

3. (a) $g'(t)=f(t)e^{-t}$ est dans E car elle est continue et $|g'(t)|\leqslant|f(t)|\leqslant Ct^n$ pour $t\geqslant A$. On applique le II3a: $\mathcal{L}(g')(x)=x\mathcal{L}(g)(x)-g(0)=x\mathcal{L}(g)(x)$ donc $\mathcal{L}(g)(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-t}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(x+1)t}dt=\frac{1}{x}\mathcal{L}(f)(x+1)$.

   (b) i. φ est continue sur $]0,1]$ car ln et g sont continues. Elle est aussi continue en 0 car $\lim\limits_{u\to0}g(-\ln u)=\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=L$.

   ii. Pour $x>0$ la fonction $t\mapsto g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'application $u\mapsto-\ln(u)$ est une bijection de classe C^1 de $J=]0,1]$ sur $I=]0,+\infty]$; on peut donc écrire:
   $\int_0^{+\infty}g(t)e^{-xt}dt=\int_0^1g(-\ln(u))u^x\frac{1}{u}du=\int_0^1\varphi(u)u^{x-1}du.$

4. Pour $x=n+1$ on a $\int_0^1\varphi(u)u^ndu=\int_0^{+\infty}g(t)e^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n+2)=0$ puisque $\mathcal{L}(f)=0$.

5. (a) $\cos(p\pi u)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}$ de rayon de convergence infini.

   (b) Puisque φ est continue sur $[0,1]$ elle y est bornée: $|\varphi(u)|\leqslant M$.
   En posant $g_n(u)=(-1)^n\frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)$ on a donc $|g_n(u)|\leqslant\frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}M$ sur $[0,1]$. La série de fonctions continues $(\sum g_n)$ converge donc normalement sur $[0,1]$. On peut donc écrire: $\int_0^1\cos(p\pi u)\varphi(u)du=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1u^{2n}\varphi(u)du=0.$

   (c) i. ψ est continue sur $[-1,1]$ car elle est paire et φ est continue sur $[0,1]$. Par période 2 elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

   ii. Seuls les coefficients a_p sont à calculer car la fonction est paire. Pour une fonction $T-$périodique $a_p=\frac{2}{T}\int_0^T\psi(t)\cos(\frac{2\pi}{T}pu)du$ donc avec $T=2$ et la parité on obtient: $a_p=2\int_0^1\psi(t)\cos(p\pi u)du=0$ avec le IV5b. L'égalité de Parseval entraine alors $\int_0^2(\psi(u))^2du=(\frac{a_0}{2})^2+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}a_p^2=0$. Par continuité de ψ on en déduit $\psi=0$ sur $[0,2]$ donc sur $\mathbb{R}$ par période 2.

6. (a) On en déduit que φ est la fonction nulle sur $[0,1]$, donc g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée $t\mapsto f(t)e^{-t}$ est donc nulle, d'où f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On a montré que $\mathcal{L}(f) = 0$ entraine que $f = 0$; le noyau de $\mathcal{L}$ est donc réduit à 0: l'application linéaire $\mathcal{L}$ est bien injective.