Corrigé de l'épreuve de Mathématiques B PC
P.Skler

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).
Soit $\Delta : E \longrightarrow E$ défini par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que P'' ou $P''(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de $P = P(X)$.

1. (a) Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de F et de G.
Correction : F est l'ensemble des polynômes pairs de degré inférieur ou égal à $2n$ on peut donc écrire

$$F = vect\left(1, X^2, .., X^{2k}, .., X^{2n}\right)$$

de même

$$G = vect\left(X, .., X^{2k+1}, .., X^{2n-1}\right)$$

On en déduit que ce sont deux sous espaces vectoriels de E. De plus on a

$$\dim(F) = n + 1 \text{ et } \dim(G) = n$$

Soit $P \in F \cap G$, on a alors $P(X) = P(-X) = -P(-X)$ d'où $P = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$.
On sait de plus que $\dim(E) = 2n + 1$, donc les sous espaces F et G sont supplémentaires.
Soit $(k, k') \in [[0, n]] \times [[1, n]]$, on a

$$\left\langle X^{2k}, X^{2k'-1} \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^{2k} t^{2k'-1} dt = \left[\frac{1}{2(k + k')} t^{2(k+k')}\right]_{-1}^{1} = 0$$

On en déduit que F et G sont orthogonaux

(b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.
Correction : La dérivation des polynômes est une application linéaire donc Δ est une application linéaire. Soit $P \in E$ on a

$$\deg(\Delta(P)) = \deg\left(\left(X^2 - 1\right) P'' + 2XP'\right)$$

$$\Rightarrow \deg(\Delta(P)) \leq \inf\left(\deg\left(\left(X^2 - 1\right) P''\right), \deg(2XP')\right) \leq \deg(P)$$

Donc $\Delta(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$ donc $\Delta(P) \in E$.
Conclusion : Δ est un endomorphisme de E

(c) En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ. Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.
Correction : On a

$$\Delta(1) = 0 \text{ et } \Delta(X) = 2$$

Soit $k \in [[2, 2n]]$,

$$\Delta\left(X^k\right) = \left(X^2-1\right) k(k-1) X^{k-2} + 2X.kX^{k-1} = k(k+1) X^k - k(k-1) X^{k-2}$$

La matrice de Δ relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & k(k+1) & & -2n(2n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 & 2n(2n+1) \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire supérieure, les valeurs propres sont alors les éléments de la diagonale. On a donc

$$Sp(\Delta) = \{k(k+1) \quad / \quad k \in [[0, 2n]]\}$$

Les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes (la fonction $k \to k(k+1)$ est trictement croissante sur $\mathbb{N}$) on en déduit que Δ est diagonalisable et que les sous espaces propres sont tous de dimension 1.

(d) Soit $k \in [|0, 2n|]$, et on pose $\lambda_k = k(k+1)$.
Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k, tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k ?
Correction : d'après le calcul précédent on a $\deg(\Delta(P)) = \deg(P)$ pour $\deg(P) > 0$ et $\Delta(1) = 0$. De plus si a est le coefficient dominant de P alors le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est $k(k+1)a$. Les polynômes associés à la valeur propre de λ_k sont donc de degré k. Or l'espace propre associé à λ_k est de dimension 1 il existe donc un unique polynôme unitaire qui engendre ce sous espace. On note P_k ce polynôme il est, d'après ce qui précède, de degré k et de coefficient dominant 1.

(e) Montrer que pour tous P et Q dans E, on a : $\langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$.
En déduire que pour tout $(k, h) \in [|0, 2n|]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.
Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n})$?
Correction : Soit $(P, Q) \in E^2$, on a

$$\langle \Delta(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\left(t^2-1\right) P''(t) + 2tP'(t)\right) Q(t)\, dt$$

On peut remarquer que

$$\Delta(P) = \left(\left(X^2-1\right) P'\right)'$$

On fait donc une intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle \Delta(P), Q \rangle &= \left[\left(t^2-1\right) P'(t) Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right) P'(t) Q'(t)\, dt \\ &= -\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right) P'(t) Q'(t)\, dt \\ &= -\left[\left(t^2-1\right) Q'(t) P(t)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \left(\left(t^2-1\right) Q''(t) + 2tQ'(t)\right) P(t)\, dt \\ &= \langle P, \Delta(Q) \rangle \end{aligned}$$

L'endomorphisme Δ est donc symétrique.
Δ est donc diagonalisable dans une base orthogonale.
Les polynômes P_k étant associés à des valeurs propres deux à deux distinctes ils forment une famille orthogonale et donc pour tout $(k,h) \in [|0,2n|]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.
La famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n})$ est une base orthogonale.

(f) Montrer que $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une base de G.
Correction : d'après le calcul de la matrice à la question $c)$ on a

$$\forall k \in [[0,n]] \quad \Delta\left(X^{2k}\right) \in F \text{ et } \forall k \in [[1,n]] \quad \Delta\left(X^{2k-1}\right) \in G$$

On en déduit que F et G sont des sous espaces stables par Δ. La restriction de Δ à l'un de ces sous espace est alors diagonalisable. Comme les sous espaces propres de Δ sont de dimension 1 on en déduit, à l'aide des degrés, que $\forall k \in [[0,n]]$ $P_{2k} \in F$ et $\forall k \in [[1,n]]$ $P_{2k-1} \in G$. De plus la famille $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est libre car orthogonale et $\dim(F) = n+1$ donc $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base de F. De même $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une base de G

2. On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

(a) Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1. , et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.
Correction : on a $\Delta(1) = 0$ donc $P_0 = 1$
$\Delta(X) = 2X$ donc $P_1 = X$.
On cherche maintenant un polynôme unitaire de degré 2 pair tel que $\Delta(P_2) = 6P_2$. Il est de la forme $P_2 = X^2 + \alpha$. On a

$$\Delta\left(X^2 + \alpha\right) = 6X^2 - 2 = 6\left(X^2 + \alpha\right)$$

d'où $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est orthogonale, il suffit donc de la normaliser pour obtenir une base orthonormale de E.
On a

$$\begin{aligned} \|P_0\|^2 &= \int_{-1}^{1} 1dt = 2 \quad , \quad \|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3} \\ \|P_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

D'où une base othonormale de E est

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$$

(b) Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E.
Correction : d'après la question $1f)$ on a $G = vect(P_1)$ c'est à dire $G = vect(X)$. De plus les polynômes X et 1 sont orthogonaux, la porjection de A sur G est donc X
La distance de A à G est alors

$$d(A,G) = \|A - X\| = \|1\| = \left(\int_{-1}^{1} dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

(c) Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).
Correction : l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui même qui à h associe $h \circ \Delta - \Delta \circ h$ est linéaire, donc C (qui est le noyau de cette application) est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soit M la matrice de Δ dans la base (P_0, P_1, P_2) et H la matrice d'un endomorphisme h élément de C. On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

h est un élément de C si et seulement si $MH = HM$. En notant $H = (h_{ij})$ on obtient alors

$$MH = HM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h_{21} & 2h_{22} & 2h_{23} \\ 6h_{31} & 6h_{32} & 6h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2h_{12} & 6h_{13} \\ 0 & 2h_{22} & 6h_{23} \\ 0 & 2h_{32} & 6h_{33} \end{pmatrix}$$

On en déduit que H est aussi une matrice diaogonale. L'ensemble des matrices qui commutent avec M est donc engendré par (E_{11}, E_{22}, E_{33}) , il est donc de dimension 3.
Par isomorphisme on peut donc dire que C est un espace vectoriel de dimension 3.

(d) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).
Correction : un endomorphisme g tel que $g \circ g = \Delta$ vérifie $g \circ \Delta = g^3 = \Delta \circ g$, c'est donc un élément de C. Sa matrice dans la base (P_0, P_1, P_2) est diagonale, d'après la question précédente. On cherche donc les matrices B diagoanles telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .On alors 4 solutions $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \qquad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1. On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

   (a) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

   i. Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1$$

   et préciser la nature de cette courbe.
   Correction : on a

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

   c'est l'équation du cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

ii. Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par h, c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Correction : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\left(2\cos^2(t) - 1\right)^2 + (2\sin(t)\cos(t))^2 = (\cos(2t))^2 + (\sin(2t))^2 = 1$$

On en déduit que la courbe paramétrée par h est incluse dans C_1.
Réciproque : soit M un point de coordonnées (x, y) appartenant à C_1, on a

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x - 1 = \cos(\theta) \text{ et } 2y = \sin(\theta)$$

on pose $t = \frac{\theta}{2}$, on a alors $2x - 1 = \cos(2t)$ et $2y = \sin(2t)$, d'où

$$x = \cos^2(t) \text{ et } y = \cos(t)\sin(t)$$

Tout point du cercle C^1 est aussi un point de la courbe paramétrée par h.
Conclusion : C_1 est le support de la courbe paramétrée par h

(b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.
Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.
Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos^2(t) + (\sin(t))^2 = 1 \text{ et } -1 \leq \sin(t) \leq 1$$

donc la courbe C_2 est incluse dans la courbe définie par $x + y^2 = 1$, avec$-1 \leq y \leq 1$.
Réciproquement : soit un point de coordonnées (x, y) tel que $x + y^2 = 1$, avec$-1 \leq y \leq 1$.
Comme $y \in [-1, 1]$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin(t)$. On a alors $x = 1 - y^2 = \cos^2(t)$. La courbe C_2 est donc définie par $x + y^2 = 1$, avec$-1 \leq y \leq 1$.
C'est une portion de parabole.
Etude de la courbe paramétrée : f_2 est 2π périodique. On a de plus

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2(-t) = \left(\cos^2(t), -\sin(t)\right)$$

la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie.
On peut donc rerstraindre l'étude à $[0, \pi]$, cependant on peut remarquer que

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_2(\pi - t) = f_2(t)$$

La courbe définie pour $t \in [0, \pi]$ est donc parcourue 2 fois on peut donc restraindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avant la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
La fonction f_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f_2'(t) = (-2\sin(t)\cos(t), \cos(t))$$

d'où le tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x_2'(t)$	0	$-$	0
	1		
$x_2(t)$		$\searrow$	
			0
			1
$y_2(t)$		$\nearrow$	
	0		
$y_2'(t)$		$+$	0

(c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.
Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.
Correction : la fonction f_3 est 2π périodique. On a

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad f_3\,(t) = -f_3\,(t)$$

la courbe admet donc O comme centre de symétrie. On peut restraindre l'étude à $[0, \pi]$
De plus

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_3\,(\pi - t) = (-\cos\,(t)\sin\,(t)\,, \sin\,(t))$$

la courbe admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. On peut donc restraindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avec $f\,(t) = \left(\frac{1}{2}\sin\,(2t)\,, \sin\,(t)\right)$ on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f_3'\,(t) = (\cos\,(2t)\,, \cos\,(t))$$

d'où le tableau de variations

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x_3'(t)$		$+$	0	$-$	
			$\frac{1}{2}$		
$x_3(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0
					1
$y_3(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	
	0				
$y_3'(t)$		$+$		$+$	

$\forall t \in \mathrm{I\!R}, (2x_3(t))^2 + (1 - 2y_3(t)^2)^2 = \sin^2(2t) + \left(1 - 2\sin^2(t)\right)^2 = \sin^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$. La courbe C_3 est bien incluse dans la courbe définie par $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.
Soit un point de coordonnées (x, y) appartenant à cette courbe,

$$\exists \theta \in \mathrm{I\!R} \quad / \quad 2x = \sin(\theta) \text{ et } 1 - 2y^2 = \cos(\theta)$$

On pose $t = \frac{1}{2}\theta$ et on obtient $x = \cos(t)\sin(t)$ et $y^2 = \sin^2(t)$.
Si $y = \sin\,(t)$ alors on obtient bien un point de C_3. Si $y = -\sin\,(t)$ on a $y = \sin\,(t + \pi)$ et $x = \cos(t)\sin(t) = \cos(t + \pi)\sin(t + \pi)$. c'est encore un point de C_3. Donc C_3 est bien la courbe définie par l'équation $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$

2. On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

(a) Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.
Correction : S_1 est le cylindre d'axe parallèle à Oz et de directrice le cercle C_1, et S_2 est la sphère de centre$O$ et de rayon 1.

(b) Soit $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{c} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \right\}$.
Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?
Correction : Γ est l'intersection des deux surfaces S_1 et S_2

(c) Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1. De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.
En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ.
Correcton : en un point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ une équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ est

$$\left(\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) \mid \overrightarrow{M_0 M}\right) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

On trouve donc : pour S_1

$$(2x_0 - 1).(x - x_0) + 2y_0.(y - y_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_1$

$$(2x_0 - 1).x + 2y_0.y + 2x_0 = 0$$

Pour S_2

$$2x_0.(x - x_0) + 2y_0.(y - y_0) + 2z_0.(z - z_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 \in S_2$

$$x_0.x + y_0.y + z_0.z = 1$$

Lorsque les plans tangents aux surfaces ne sont pas confondus, la tangente au point d'intersection des deux surface est alors l'intersection des deux plans tangents.

(d) Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.
En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.
Correction : Soit M un point de coordonnées $(x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ .On a

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow r\cos(\theta) = r^2 \text{ et } r^2 + z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (r = 0 \text{ ou } r = \cos(\theta)) \text{ et } z^2 = 1 - r^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta).$$

On obtient alors $r = \cos(\theta)$ et $z = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, ou $r = \cos(\theta)$ et $z = -\sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ces deux paramétrages donnent la même courbe.
On obtient alors pour paramétrage de Γ : $x = \cos^2(\theta), y = \cos(\theta)\sin(\theta), z = \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.

Soit C le cône de sommet $S = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ s'appuyant sur Γ on a .

$$\begin{aligned} M \in C &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists M_0 \in \Gamma \quad \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SM_0} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \lambda \left(\cos^2(\theta) - \dfrac{1}{2} \right) \\ y = \lambda \cos(\theta) \sin(\theta) \\ z = \lambda \sin(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?
Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 = \cos(t)^2 \quad \text{et} \quad \cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

donc $\gamma \subset \Gamma$. La réciproque a été étudiée dans la question d) donc $\gamma = \Gamma$

(f) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.
Correction : Les trois courbes planes projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz sont obtenues en annulant une coordonnée.
Sur xOy : $z = 0, x = \cos^2(t), y = \cos(t)\sin(t), t \in \mathbb{R}$: courbe C_1 ;
sur xOz : $y = 0, x = \cos^2(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_2 ;
sur yOz : $x = 0, y = \cos(t)\sin(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_3

EXERCICE 3

1. (a) Justifier l'existence des intégrales :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx \,;\, K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Correction : la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1-x}$ est continue et de signe constant sur $]0, 1[$. On a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$
On a au voisinage de 0

$$\frac{\ln(x)}{1-x} \sim \ln(x)$$

or la fonction ln est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ donc la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1-x}$ aussi.
Conclusion : J existe.
La fonction $x \to 1-x$ est de classe C^1, strictement décroissante sur $[0, 1]$; en effectuant le changement de variable associé dans l'intégrale impropre J, on obtient :

$$J = \int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{1-(1-x)}(-1)dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = K$$

d'où l'existence de K et $K = J$

(b) Justifier l'existence et calculer $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x)dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Correction : la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ d'où l'existence de u_0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \to x^n \ln(x)$ admet une limite nulle en 0, elle est donc prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0,1]$ d'où l'existence de u_n.
On a

$$u_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left([x\ln(x) - x]_\varepsilon^1 \right) = -1$$

pour $n > 0$

$$\begin{aligned} u_n &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^n \ln(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{n+1} x^n dx \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$.
Calculer les coefficients de Fourier de f.
En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé.
Correction : la fonction f est 2π périodique et paire les coefficients b_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont donc tous nuls. On a de plus

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x.dx = \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x.\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} [\cos(nx)]_0^\pi = \frac{2}{\pi . n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{2n} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi (2n+1)^2}$$

La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

En pariculier pour $x = 0$ et on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2n+1)^2}$$

d'où

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(d) Soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$, et grâce à (c) en déduire la valeur de T.
Correction : on a

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + S$$

D'où $\frac{3}{4}T = S$. On en déduit que $T = \frac{\pi^2}{6}$

(e) En utilisant la série de terme général u_n, justifier l'égalité : $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1-x}dx = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de (a).

Correction : pour tout $x \in \left]0,1\right[$ on a $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série entière de rayon de convergence 1). On a donc

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad \frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x)$$

On pose $f_n(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \in \left]0,1\right[$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\left]0,1\right[$.. La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1-x}$ De plus $\int_0^1 |x^n \ln(x)|\, dx = \frac{1}{(n+1)^2}$,la série de terme général $\int_0^1 |x^n \ln(x)|\, dx$ est donc convergente. On peut utilise le théorème d'intégration termes à termes pour les intégrales généralisées et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Donc $J = K = -\dfrac{\pi^2}{6}$

(f) Justifier l'existence des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx$ et les calculer grâce aux résultats précédents.

Correction : Au voisinage de 0 on a $\frac{\ln(x)}{1+x} \sim \ln(x)$ qui est intégrable, donc l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1+x}dx$ existe.

De même $\frac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ et de plus $\frac{\ln(x)}{1-x^2} = \frac{\ln(x)}{(1+x)(1-x)} \underset{x\to 1}{\to} -\frac{1}{2}$ et donc l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1-x^2}dx$ existe.

Par développement en série entière de $x \to \frac{1}{1+x}$ on a, pour $x \in \left]0,1\right[$, avec les notations de la question précédente

$$\frac{\ln(x)}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \ln(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$$

On a les mêmes hypothèses que la question précédente donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}T - S \\ &= -\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

De même

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln(x)\, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

2. (a) Calculer : $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ et justifier l'existence de : $B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

Correction : la fonction $x \to -\ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

D'où l'existence et la valeur de la série demandée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On a pour tout $k > 0$ $0 < \frac{1}{k^2 2^k} \leq \frac{1}{k^2}$ or la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente donc la série $\sum \frac{1}{k^2 2^k}$ converge, donc B existe.

(b) Justifier l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx = -(\ln(2))^2 - B$.

Correction : avec les notations de la question 1e) on a $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ $\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc la série $\sum \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|\, dx$ est convergente. On peut donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme. On a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_0(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x)\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

et pour $n > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \ln(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x)\right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{n+1}x^n dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)\right) - \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \varepsilon^{n+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right) \\
&= -\ln(2)\, A - B = -(\ln(2))^2 - B
\end{aligned}$$

(c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

Correction : la fonction $t \to \ln(1-t)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1}$$

d'où

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^n$$

Cette fonction admet une primitive et on a pour $x \in]-1,1[$

$$\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -B$$

On a de plus, par changement de variables $u = 1-t$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} (-1)\, du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} du = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln(2))^2 + B\end{aligned}$$

D'où

$$B = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

 (a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.
 Correction : on a au voisinage de 0, $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, d'où $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
 On a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

 d'où, au voisinage de $+\infty$, $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ et donc

$$a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$$

 (b) Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.
 On pourra noter $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.
 Correction : la série de terme général $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.on en déduit par comparaison de la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge. Or on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1$$

 on en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^n\dfrac{h_n}{n}$.

Correction : on a $h_n = a_n + \ln(n)$ or la suite (a_n) converge et la suite $(\ln(n))$ diverge vers $+\infty$, on en déduit qu'au voisinage de $+\infty$ $h_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$. Or pour tout entier $n \geq 3$ $\ln(n) \geq 1$ et donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente on en déduit que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ et par suite la série $\sum h_n$ est divergente.

La série $\sum (-1)^n h_n$ est une série alternèe. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{n} = 0$ car (a_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

On a de plus

$$\begin{aligned}
\frac{h_{n+1}}{n+1} - \frac{h_n}{n} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\frac{-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\frac{-1}{n(n+1)} < 0.
\end{aligned}$$

D'où , d'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum (-1)^n h_n$ converge.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)dx$, et montrer que : $v_n = -\dfrac{h_{n+1}}{n+1}$.

Correction : La fonction $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$, de signe constant. Au voisinage de 1 on a $x^n \ln(1-x) \sim \ln(1-x)$, or cette fonction est intégrable sur $[0,1[$ donc la fonction est intégrable sur $[0,1[$, c'est à dire v_n existe, pour tout n.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \ln(1-x)dx &= \lim_{u\to1} \int_0^u x^n \ln(1-x)dx \\
&= \lim_{u\to1}\left(\left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-x)\right]_0^u - \int_0^u \frac{1-x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}dx\right) \\
&= \lim_{u\to1}\left(\left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-x)\right]_0^u - \frac{1}{n+1}\int_0^u \sum_{k=0}^{n} x^k dx\right) \\
&= \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = -\frac{h_{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

(b) Montrer l'égalité des trois réels U, V et W, avec

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{h_n}{n} \text{ , } V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}dt \text{ , } W = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 2^n}.$$

Correction : La fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1+t}$ est continue sur $[0,1[$, de signe constant

Au voisinage de 1, $-\dfrac{\ln(1-t)}{1+t} \sim -\dfrac{1}{2}\ln(1-t)$, donc la fonction est intégrable sur $[0,1[$.

On a : $\forall t \in [0,1[, -\dfrac{\ln(1-t)}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n \ln(1-t)$.

La série de terme général $\int_0^1 |t^n \ln(1-t)|dt$ est divergente (c'est la série de $\sum \frac{h_n}{n}$), on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.On procède par majoration du reste :

$$\begin{aligned}\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)dt\\ &= \sum_{n=0}^{p}\int_0^1(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)dt+\int_0^1\sum_{n=p+1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)dt\\ &= \sum_{n=0}^{p}(-1)^n\frac{h_{n+1}}{n+1}+\int_0^1\sum_{n=p+1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)dt\end{aligned}$$

où

$$|\int_0^1\sum_{n=p+1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)dt|\leq\int_0^1|\sum_{n=p+1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\ln(1-t)|dt\leq\int_0^1 t^{p+1}|\ln(1-t)|dt=\frac{h_{p+2}}{p+2}.$$

Or la suite $\left(\frac{h_n}{n}\right)$ converge vers 0 Donc :

$$\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t}dt=\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{p}(-1)^n\frac{h_{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}$$

D'où $U=V$.
On a

$$\begin{aligned}V &= -\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{1+t}dt \overset{u=1-t}{=} -\int_0^1\frac{\ln(u)}{2-u}du \overset{u=2v}{=} -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(2v)}{2-2v}2dv\\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(v)}{1-v}dv-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(2)}{1-v}dv=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(v)}{1-v}dv-(\ln(2))^2\end{aligned}$$

Avec la question $2b$ on obtient $V=W$