E L A 4

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Ce problème a pour but d'étudier les crochets de Lie sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 1, 2 ou 3.
  Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise certains résultats de la partie I.
- E étant un $\mathbb{R}$ espace vectoriel :
  Une application B de $E\times E$ dans E est dite antisymétrique ssi
  $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in E^2\right)\left(B\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-B\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right)$.
  On appelle crochet de Lie sur E noté [,] toute application telle que :
  - [,] : $E\times E\to E$
  - [,] est bilinéaire
  - [,] est antisymétrique
  - $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in E^3\right)\left(\left[\vec{u},\left[\vec{v},\vec{w}\right]\right]+\left[\vec{v},\left[\vec{w},\vec{u}\right]\right]+\left[\vec{w},\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right]=\vec{0}\right)$
- Dans ce problème l'ensemble des vecteurs de la géométrie plane est identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de la géométrie dans l'espace à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Si E est le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ la notation de la géométrie vectorielle pour les éléments de E sera adoptée : ils seront notés avec une flèche.
- Dans les parties I et III, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire usuel de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et le produit vectoriel de ces deux vecteurs sera noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
  On rappelle la formule : $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in\mathbb{R}^3\right)\left(\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v}-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}\right)$.
  $b_0=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques.

- Si b est une base de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{M}_b(\vec{u})$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ formé par les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base b et $\mathfrak{M}_b(f)$ la matrice de f dans la base b.
Si $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, φ_A désignera l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base b_0 est A.

<u>Questions de cours.</u>

1) Montrer que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier si $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ donner l'unique décomposition de C en $C=S_C+A_C$ où $S_C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

2) Si $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}(S) \leq 2$, montrer qu'il existe une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormée <u>directe</u> telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Application : on considère $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer une base b et les valeurs de β et γ. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice S^n (distinguer n pair et n impair).

<u>Partie I : Exemples de crochets de Lie et premières propriétés.</u>

1) <u>Exemples de crochet de Lie :</u>

   a) On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque, montrer que $[\,,\,] : \begin{cases} E \times E \to E \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{0} \end{cases}$ est un crochet de Lie sur E.

   b) Montrer que $[\,,\,] : \begin{cases} E \times E \to E \\ (A, B) \mapsto AB - BA \end{cases}$ est un crochet de Lie sur $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $E=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce un crochet de Lie sur $E=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$? (justifier la réponse)

2) <u>Crochet de Lie usuel sur $\mathbb{R}^3$:</u>

   a) Montrer que $\left(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3\right)\left(\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}\right)$.En déduire que $[\,,\,] \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

   b) On considère $\vec{a} \in \mathbb{R}^3, \vec{a} \neq \vec{0}$ et $\psi_{\vec{a}} \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{u} \end{cases}$.

      i) Montrer que $\psi_{\vec{a}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

      ii) Déterminer le noyau et le rang de $\psi_{\vec{a}}$.

iii) Dans la suite de cette question, on pose $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ où $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, donner la matrice $A_{\vec{a}}$ de $\psi_{\vec{a}}$ dans la base b_0, vérifier que $A_{\vec{a}}\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

iv) Calculer le polynôme caractéristique de $A_{\vec{a}}$.

v) $\psi_{\vec{a}}$ est-il diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

vi) On considère une matrice antisymétrique quelconque $A\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe un unique $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ tel que $A=A_{\vec{a}}$.

Partie II : Détermination des crochets de Lie en dimension 1 et 2.

1) On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque muni d'un crochet de Lie [,].

a) Montrer que si $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée de E alors $[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

2) Détermination des crochets de Lie en dimension 1.

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 1.

a) Si E est muni d'un crochet de Lie [,], montrer que $(\forall(\vec{u},\vec{v})\in E^2)\left([\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}\right)$.

b) Quels sont tous les crochets de Lie sur E ?

3) Détermination des crochets de Lie en dimension 2.

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B=(\vec{u_0},\vec{v_0})$. Le déterminant de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ de E dans la base B sera noté $\det_B(\vec{u},\vec{v})$.

a) On suppose dans cette question que E est muni d'un crochet de Lie [,] quelconque. Si $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ avec $\vec{x}=x_1\vec{u_0}+x_2\vec{v_0}$ et $\vec{y}=y_1\vec{u_0}+y_2\vec{v_0}$ où $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$, montrer que $[\vec{x},\vec{y}]=\det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k_0}$ où $\vec{k_0}=[\vec{u_0},\vec{v_0}]$.

b) Dans cette question, on considère $\vec{k}$ un vecteur quelconque de E et on pose si $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$: $[\vec{x},\vec{y}]=\det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k}$, le but de cette question est de montrer que c'est un crochet de Lie sur E.

i) Montrer que
$$\left(\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in E^3\right)\left(\det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w}+\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u}+\det_B(\vec{w},\vec{u})\vec{v}=\vec{0}\right).$$

ii) Montrer que $\left(\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in E^3\right)\left(\left[\vec{u},[\vec{v},\vec{w}]\right]=\left[\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u},\vec{k}\right]\right)$.

iii) En déduire que [,] est un crochet de Lie sur E.

c) Quels sont tous les crochets de Lie sur E ?

Partie III : Etude des crochets de Lie en dimension 3.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes. On rappelle que $b_0=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Expressions des crochets de Lie sur $\mathbb{R}^3$:

Dans toute la question 1), [,] représente un crochet de Lie quelconque sur $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $\vec{c_1}=[\vec{j},\vec{k}]=\begin{pmatrix} c_{11}\\ c_{21}\\ c_{31}\end{pmatrix}$, $\vec{c_2}=[\vec{k},\vec{i}]=\begin{pmatrix} c_{12}\\ c_{22}\\ c_{32}\end{pmatrix}$, $\vec{c_3}=[\vec{i},\vec{j}]=\begin{pmatrix} c_{13}\\ c_{23}\\ c_{33}\end{pmatrix}$ et

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$ avec $C\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Le but de cette question est de montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in(\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x},\vec{y}]=f(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

i) Montrer que si $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ et $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ alors

$$[\vec{x},\vec{y}]=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{c_1}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{c_2}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{c_3}.$$

ii) En déduire que pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in(\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x},\vec{y}]=\varphi_C(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

iii) Montrer que φ_C est l'unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in(\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x},\vec{y}]=f(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

b) D'après la question de cours 1) il existe un unique $S_C\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tels que $C=S_C+A_C$.

i) D'après (Partie I)2)b)vi)), il existe un unique $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ tel que $A_C=A_{\vec{a}}$ c'est-à-dire $\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^3$: $\varphi_{A_C}(\vec{u})=\vec{a}\wedge\vec{u}$. Montrer que $2\vec{a}=\begin{pmatrix} c_{32}-c_{23}\\ c_{13}-c_{31}\\ c_{21}-c_{12}\end{pmatrix}$.

ii) Montrer que $2\vec{a}=\vec{i}\wedge\vec{c_1}+\vec{j}\wedge\vec{c_2}+\vec{k}\wedge\vec{c_3}$.

iii) Montrer que $[\vec{i},\vec{c_1}]+[\vec{j},\vec{c_2}]+[\vec{k},\vec{c_3}]=\vec{0}$.

iv) En déduire que $\varphi_C(2\vec{a})=\vec{0}$ et que $\vec{a}\in\mathrm{Ker}(\varphi_{S_C})$.

c) Déduire des questions précédentes que $\left(\forall(\vec{x},\vec{y})\in(\mathbb{R}^3)^2\right)$

$\left([\vec{x},\vec{y}]=\varphi_{S_C}(\vec{x}\wedge\vec{y})+(\vec{a}\cdot\vec{y})\vec{x}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{y}\right)$.

2) Réciproque :

Dans cette question, on considère $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\vec{a} \in \mathrm{Ker}(\varphi_S)$ quelconques.

On définit [,] par : $\left(\forall\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2\right)\left(\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\varphi_S\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{y}\right)\vec{x}-\left(\vec{a}\cdot\vec{x}\right)\vec{y}\right)$ et l'on veut montrer que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ (dit crochet de Lie associé à S).

a) Montrer que [,] est bilinéaire antisymétrique.

b) On suppose dans cette question $\vec{a}\neq\vec{0}$, on pose $\rho=\left\|\vec{a}\right\|$. Dans la question de cours 2), a été établie l'existence d'une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormale directe telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$ où $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

i) Montrer que le premier vecteur de b peut-être choisi égal à $\frac{1}{\rho}\vec{a}$.

Dans la suite de cette question, le premier vecteur de b est $\frac{1}{\rho}\vec{a}$.

ii) Si $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, on note $\mathfrak{M}_b\left(\vec{u}\right)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ et $\mathfrak{M}_b\left(\vec{v}\right)=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, montrer que

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(u_3v_1-u_1v_3)\vec{d}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{e} \text{ où } \mathfrak{M}_b\left(\vec{d}\right)\begin{pmatrix}0\\\beta\\\rho\end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{M}_b\left(\vec{e}\right)\begin{pmatrix}0\\-\rho\\\gamma\end{pmatrix}.$$

iii) Si $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, on note $\mathfrak{M}_b\left(\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, calculer $\left[\vec{x},\vec{d}\right]$ et $\left[\vec{x},\vec{e}\right]$.

iv) En déduire que si $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$ avec $\mathfrak{M}_b\left(\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathfrak{M}_b\left(\vec{y}\right)=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ et

$$\mathfrak{M}_b\left(\vec{z}\right)=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \text{ alors } \left[\vec{x},\left[\vec{y},\vec{z}\right]\right]=x_1\left((y_1z_2-y_2z_1)\vec{d'}+(y_1z_3-y_3z_1)\vec{e'}\right) \text{ où}$$

$$\mathfrak{M}_b\left(\vec{d'}\right)\begin{pmatrix}0\\\rho^2-\beta\gamma\\-2\rho\gamma\end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{M}_b\left(\vec{e'}\right)\begin{pmatrix}0\\2\rho\beta\\\rho^2-\beta\gamma\end{pmatrix}.$$

v) Montrer que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

vi) Application : En utilisant la partie Question de cours)2), donner l'expression d'un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ associé à $S=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

c) On suppose dans cette question $\vec{a} = \vec{0}$, montrer par un raisonnement similaire à III)2)b) que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

* * *